Numeración,
¿Querés que te cuente?

9 5 3 6 7

Con propuestas para el aula

Dirigido a:

Docentes de Nivel Inicial

EGB 1 y EGB 2

Docentes y alumnos de Profesorado

Liliana Eguiluz / Mabel Pujadas

Numeración,

¿Querés que te cuente?

Liliana Eguiluz | Mabel Pujadas

Numeración,

¿Querés que te cuente?

Con propuestas para el aula

Dirigido a:

Docentes de Nivel Inicial

EGB 1 y EGB 2

Docentes y alumnos de Profesorado

Liliana Eguiluz / Mabel Pujadas

Mabel Pujadas
- Maestra Normal Nacional egresada de la Escuela Normal Nº 4 "E. S. Zeballos"
- Profesora de Matemática egresada de la Universidad de Bs. As.

Se ha desempeñado como docente:
- en los niveles primarios, secundarios, terciario y universitario
- con amplia trayectoria en Didáctica de la Matemática.

Ha sido integrante:
- del grupo de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba
- del Equipo de Currículum de Matemática de la Dirección de Planificación y Estratégias Educativas del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Liliana Eguiluz
- Profesora de Matemática, Física y Cosmografía egresada del Instituto Católico de Profesorado.

Se ha desempeñado como docente
- en los niveles secundario y terciario
- con amplia trayectoria en Didáctica de la Matemática y en Práctica de la Enseñanza, en Institutos Superiores de la Ciudad de Córdoba.

Ha sido integrante:
- del equipo de Matemática de la Dirección de Investigaciones e innovaciones Educativas
- del Equipo Central del PROINTEC
- del Equipo de Currículum de Matemática de la Dirección de Planificación y Estratégias Educativas, todos del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Ambas profesoras han publicado, en forma conjunta, artículos referidos a la enseñanza de la Matemática, en revistas de educación actuales y los libros:
- Fracciones ¿un quebradero de cabeza?
- Ni más ni menos que adición y sustracción
- Quinto.m@te (para 5º EGB)
- Sexto.m@te (para 6º EGB)

Asimismo cuentan con una gran experiencia en capacitación docente.

ISBN: 987-9363-25-6

E-mail: lilianaeguiluz@gmail.com
mabelpujadas@gmail.com
Córdoba, República Argentina

galeón
E-D-I-T-O-R-I-A-L

Impreso en **soluciones*gráficas*®** (0351) 4240611

Índice

1. ¿Qué le proponemos?

1. ¿Qué le proponemos?

Una vez más llegamos a Ud., docente de EGB o estudiante del Profesorado.
Le proponemos que trabaje con este libro de la misma forma que lo propusimos en

- Fracciones, ¿un quebradero de cabeza? - Editorial Galeón (1998) y Ediciones Novedades Educativas (2000),
- La geometría...esa gran olvidada - Editorial Galeón (2002) y
- Ni más ni menos que adición y sustracción - Editorial Galeón (2004)

Comience por resolver problemas que le servirán de punto de partida para el desarrollo de las temáticas a tratar y le permitirán conocer dónde está Ud. en cuanto al saber numeración. En el capítulo 3 desarrollaremos lo concerniente a la numeración como conocimiento a enseñar. En el capítulo 4 incluimos varias propuestas para el aula con los correspondientes análisis didácticos que lo ayudarán en el momento de la implementación. El "saber sabio" es motivo de estudio en el capítulo 5, con la profundidad que creemos necesaria para su tarea y que le permitirá salvar algunas dudas que frecuentemente manifiestan tener los maestros.

Pretendemos que este libro le resulte sumamente ameno y provechoso, que lo use como material de estudio y capacitación docente, como así también de permanente obra de consulta.

Pı

el

La

qu

¿Se

¿Qu

¿Có

¿Qu

¿Po

¿Qu

A tra

Ader

que l

2. Para comenzar, problemas

2. Para comenzar, problemas

Es poco usual que al comenzar la lectura de un libro Ud. haya tenido que resolver problemas o ponerse a jugar, sin embargo así es en este caso. Pensamos que con ello lograremos, desde un comienzo, ponerlo en contacto con la propuesta que le acercamos y descontamos que lo hará. Necesitamos que "viva" cada situación para compenetrarse de la misma y acompañarnos en el posterior análisis. Esta sugerencia que le hacemos le resultará indispensable para una mejor y más acabada comprensión.

Puede resolver los problemas en forma individual o también, grupal. Esta última forma de trabajo es más conveniente pues le permitirá escuchar otras opiniones y esto redundará en un mayor aprovechamiento de la actividad.

Comencemos de una vez:

2.1 Desafío romano

¿Se acuerdan del sistema de numeración romano? Veamos, veamos..., pensemos en todos los números posibles de ser escritos usando solamente los símbolos **I, X, L** o **C** respetando las leyes de dicho sistema.

- ¿Cuántos números pudieron escribir?
- ¿Cómo pueden asegurar que no omitieron ninguno?

2.2 Juguemos a las cartas

En el anexo que figura en el *capítulo 6 Anexos* encontrarán dos mazos de cartas para recortar. Separe las tarjetas y arme dos mazos: uno con las tarjetas grises y el otro con las restantes tarjetas. Las reglas para jugar son las siguientes:

- Cada jugador tiene su propio par de mazos y simultáneamente, todos los jugadores extraen al azar dos cartas del mazo gris y tres del mazo blanco.
- Arman el número que crean conveniente utilizando las cartas extraídas (pueden desechar alguna si les impide armarlo)
- No está permitido usar lápiz y papel
- Es ganador el que logra el mayor número entre todos los jugadores.

2.3 Completando la serie

¿Les gustan los misterios?. En la tabla de la página siguiente aparecen los números naturales escritos según un sistema de numeración no decimal. Complete los lugares vacíos, respetando la serie.

a) Exprese por medio de este sistema de numeración la cantidad de elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

M = { dedos de una mano}
N = { meses del año}
O = { diagonales de un icoságono}

b) ¿En qué fila y columna aparecerá el ADDD? ¿Y el ADCD, el BCDD, el CBDB, el ADDDDD?
c) ¿Cuál fue la estrategia elegida para llegar a las respuestas?

	A	B	C
AD	AA	AB	AC
BD	BA	BB	BC
CD	.....	CB	CC
ADD	ADA	ADB	ADC
......	AAA	.....	.....
.....	ABA	.....	ABC
.....	.....	......	.....
BDD	BDA	.....	BDC
......	......	......	......
BBD	......	BBB	......

2.4 *Cuanto más cerca, mejor*

Vamos a jugar nuevamente a las cartas. Busque tres o cuatro compañeros. En el *capítulo 6 Anexos* encontrará el mazo de cartas para recortar. Cada jugador deberá tener su propio mazo de cartas. Las reglas para jugar son las siguientes:

- Un participante será el conductor mientras los restantes serán los jugadores.
- El conductor extraerá cuatro cartas al azar y formará un número de 4 cifras
- Los demás jugadores también extraerán cuatro cartas al azar y con ellas podrán optar por
  - ✓ Formar un número de 4 cifras o
  - ✓ Dejar de lado las cartas que desee (de las cuatro que extrajo) y formar con las que le quedaron una cantidad de decenas, centenas o unidades de mil

Por ejemplo, si el conductor formó el número 3791 y un jugador sacó las cifras 3,8,5,8 puede formar el número 3858 o bien desechar un 8 y formar el número 385 decenas que está más cerca de 3791.

- El jugador que logra **el número más próximo** al que formó el conductor gana un punto (puede haber empate). Si quien proclama ser ganador se equivoca, ya sea porque hay otro jugador con un número más cercano o porque él mismo podría haber formado un número más cercano, el conductor tiene derecho a reclamar el punto para sí.
- En cada ronda, cambia el conductor hasta que todos hayan cumplido una vez este rol.
- Es ganador absoluto quien reúne más puntos al cabo de todas las rondas. ¡Mucha suerte!

2.5 *Si ya resolvió los problemas, veamos respuestas posibles*

Desafío romano

¿Recuerda los símbolos que utiliza el sistema de numeración romano? Los símbolos son letras y sus valores son:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

¿Cuáles son las reglas que deben tenerse en cuenta para representar números con dichos símbolos?

- Los símbolos I, X, C son los únicos que se pueden repetir hasta tres veces consecutivas y suman sus valores
- Los símbolos I, X, C respectivamente antepuestos a V o X, L o C, D o M le restan su valor a los mismos y si van pospuestas, le suman su valor
- Un símbolo colocado entre otros dos de mayor valor, se resta al inmediato a su derecha
- En caso de que sea necesario multiplicar por mil un símbolo, se coloca una raya horizontal encima del mismo

Con estas condiciones, del uno al nueve podemos escribir cuatro números, del diez al diecinueve podemos escribir cinco números, del veinte al veintinueve podemos escribir cinco números, otro tanto del treinta al treinta y nueve, del cuarenta el cuarenta y nueve, ... , del trescientos noventa al trescientos noventa y nueve. En síntesis, podemos escribir 4 + 39 x 5 = 199 números.

¿Cómo estamos seguros de que no falta ninguno?. Una posible justificación es advertir que primero aparecen los números menores que diez y los restantes intervalos comienzan con un número exacto de decenas seguidos de los terminados en uno, dos, tres y nueve.

El sistema de numeración romano es uno de los sistemas de numeración creados por el hombre. Su origen se remonta al sistema etrusco que hasta el 4 representaban por barras verticales.

Representaban el 5 así IIII V

Representaban el 9 así IIII V IIII

Representaban el 10 así IIII V IIII X

Representaban el 17 así IIII V IIII X IIII V II

Algunos historiadores consideran que el signo V podría simbolizar una mano, mientras que X representaría dos manos.

Posteriormente y por un criterio de economía se evitaba dibujar las barras dando lugar a escrituras más cortas como para representar a 4 **IV** para representar 6 **VI**

para representar a 9 **IX** para representar 11 **XI**

☺ *¿Conoce usted otros sistemas de numeración?, ¿cuáles?, ¿qué propiedades comparten y en cuáles se diferencian?.*

Juguemos a las cartas

¿Se ha divertido un rato?. Como habrá podido comprobar, las cartas propuestas tenían los números expresados en el lenguaje que utilizamos para hablar. Esto, ¿facilitó o entorpeció el armado de los números?¿Hubiera preferido traducir los números a la escritura con cifras del sistema de numeración actual?.
Seguramente la respuesta es si, ya que por el conocimiento que tenemos del sistema de numeración escrito con cifras, no presentaría dificultad escribir el número más grande.
No deja de sorprendernos al momento de jugar que, seleccionando las mismas cartas, distintos jugadores produjeran una gran variedad de respuestas para el número mayor.
Por ejemplo, con las cartas cuatro, cincuenta, ocho, mil y millón aparecen estas escrituras para el mayor número posible:

✓ Ocho millones mil cincuenta y cuatro (*aquí justifican diciendo que es el mayor porque se eligió entre ocho y cuatro la cifra mayor para empezar y a continuación la palabra millones que es más grande que mil y luego en orden decreciente las siguientes palabras.*)

✓ Ocho mil millones cincuenta y cuatro (*es el mayor porque ocho es más grande que cuatro, por eso va primero pero entre poner millones o mil millones elijo mil millones porque es más grande. Las demás palabras van en orden decreciente*)

✓ Mil ocho millones cincuenta y cuatro (*empezar con mil ocho me da un número más grande que empezar con ocho. Después pongo millones , cincuenta y cuatro*)

✓ Cincuenta y ocho millones mil cuatro (*es el mayor porque cincuenta y ocho es más grande que ocho*)

✓ Mil cincuenta y ocho millones cuatro (*similar a la anterior*)

✓ Cincuenta y ocho mil millones cuatro (*lo más grande que voy a poder hacer con mil y millones es mil millones. Lo agrando más si adelante le pongo cincuenta y ocho que es lo más grande que puedo formar con las palabras que me quedan . Al final le pongo el cuatro)*

Como se puede observar en algunas de estas justificaciones no se han considerado todos los datos, pero en aquellas que sí los han tenido en cuenta, vemos que hay una tendencia a elegir los números cuyas palabras representan cifras para poner en primer lugar, de izquierda a derecha, y en orden decreciente. Observar por ejemplo en el primer caso se decide por ocho y no por cuatro para la carta de la izquierda . Esta elección no hubiese generado ningún problema si se estuviese trabajando con cifras. Lo que no se ha tenido en cuenta en este caso, al igual que en otros que Ud. mismo puede verificar anteriormente, es que el sistema de numeración oral no es posicional, sino aditivo multiplicativo. Los símbolos son las palabras escritas en las cartas. Así que la idea es combinar los símbolos de tal manera que al ser multiplicados y sumados, permitan obtener el mayor número posible. Tal es el caso del último ejemplo dado: cincuenta y ocho mil millones cuatro.

☺ *¿Son iguales el sistema de numeración oral y el escrito? ¿En qué se asemejan y en qué se diferencian?*

Completando la serie

Para expresar el número de elementos de cada uno de los conjuntos podemos recurrir al <u>conteo</u> usando este extraño sistema de numeración y que en nuestro caso sería algo así :

Dedo pulgar: A
Dedo índice: B
Dedo medio: C
Dedo anular: AD
Dedo meñique: AA

Es decir que tenemos AA dedos en cada mano y hay CD meses en un año.

☺ *¿Llegó a la misma respuesta?. ¿Qué estrategia empleó?*

Los términos de la serie presentada reciben el nombre de **numerales.** Un numeral es la representación de un número según un sistema de numeración determinado. Tanto 5 como V, cinco, IIIII son numerales que representan el mismo número.
Para expresar la cantidad de diagonales del icoságono pudo haber recurrido al conteo prolongando la serie. Para ello debió descubrir la ley de formación de los términos de la misma.
Es factible que Ud. haya descubierto dos regularidades importantes:

- ✓ todos los numerales de una columna terminan con la misma letra
- ✓ todos los numerales de una fila comienzan con las mismas letras

Si no las descubrió, es el momento de comprobarlas.
La primera columna corresponde a todos los numerales terminados en D.
La segunda columna corresponde a todos los numerales terminados en A.
La tercera columna corresponde a todos los numerales terminados en B.
La cuarta columna corresponde a todos los numerales terminados en C.
La primera fila tiene todos los numerales que son de una sola letra
De la segunda a la cuarta fila, todos los numerales son de dos letras, comenzando por A la segunda fila, por B la tercera fila y por C la cuarta fila. De la quinta en adelante los numerales son de tres letras, comenzando por AD, AA, AB, AC, BD, BA, BB, BC, CD, CA, CB, CC, etcétera. Note que las letras iniciales repiten los numerales de la segunda a cuarta fila. Otra regularidad interesante es que siempre se repite el orden D A B C cíclicamente.
Con respecto a las preguntas que se formularon podemos decir:
¿En qué fila y columna aparecerá el ADDD?
En la fila n°17 y columna n°1
¿Y el ADCD, el BCDD, el CBDB, el ADDDDD?
En la fila n°20 y columna n°1, en la fila n°45 y la columna n°1, en la fila 57 y columna n°3, en la fila n°1025 y columna n°1.

	A	B	C
AD	AA	AB	AC
BD	BA	BB	BC
CD	**CA**	CB	CC
ADD	ADA	ADB	ADC
AAD	AAA	**AAB**	**AAC**
ABD	ABA	**ABB**	ABC
ACD	**ACA**	**ACB**	**ACC**
BDD	BDA	**BDB**	BDC
BAD	**BAA**	**BAB**	**BAC**
BBD	**BBA**	BBB	**BBC**

☺ *¿Qué base tiene este sistema?. ¿Es posicional?. ¿Es aditivo?. ¿Es multiplicativo?.*

☺ *Nuestro actual sistema de numeración, ¿presenta regularidades?, ¿cuáles?.*

Cuanto más cerca, mejor

¿Se ha divertido?. Mucho mejor. Analicemos algunas partidas reñidas.
Conductor: cifras 4, 6, 7, 8
Jugador 1: cifras 1, 5, 8, 8
Jugador 2: cifras 0, 2, 4, 9
Jugador 3: cifras 3, 4, 9, 9
El conductor propuso el número 4.768. ¿Qué propusieron los jugadores?
El jugador 1 eligió el número 5.188, el jugador 2 eligió el 4.920, el jugador 3 eligió 3.994. ¿Quién ganó?. ¿Eligieron bien?
Tal como han elegido los números, el ganador es el jugador 2. Sin embargo...
Por supuesto que el conductor reclamó para sí el punto pues tanto el jugador 2 como el 3 podían haber elegido 49 centenas que estaba más cerca de 4.768 que los números propuestos.
Otra partida difícil fue aquella en la que el conductor propuso el número 4022 y los jugadores: 5069, 4178 y 3866. Creían estar ante un empate entre los dos últimos cuando el conductor reclamó el punto pues dijo que 4 unidades de mil estaba mucho más cerca.
En este juego-problema se manifiesta el conocimiento del sistema de numeración particularmente en cuanto a la ley de posicionalidad, la comparación de números, encuadre en decenas, centenas, unidades de mil. Los procedimientos para reconocer qué número está más cerca de otro no sólo se basan en hacer restas sino también por ubicar los puntos en la recta numérica o por una apreciación más de tipo "global".
Por ejemplo en el primer caso analizado decidir quién es el ganador sin cambiar los números propuestos por los jugadores decidir quién ganó lleva a restar pero advertir que 49 centenas está más cerca de 4768 que 4920 resulta de la ubicación de dichos puntos en la recta numérica (49 centenas está entre 4768 y 4920) o por pensar en 49 centenas como una "aproximación por defecto" a 4920.

3. La numeración como conocimiento a enseñar

3.1 Sistemas de numeración

Al plantear el problema **Desafío romano** le preguntamos si conocía otros sistemas de numeración además del sistema de numeración romano y del que usamos en la actualidad. En este apartado estudiaremos otros sistemas de numeración, realizando un breve recorrido histórico, analizando las propiedades que los caracterizan y estableciendo analogías y diferencias entre ellos.

3.1.1 Los antepasados de nuestro sistema de numeración

Cuando miramos a nuestro alrededor observamos objetos sueltos o formando colecciones. Aparecen las ideas de **uno** y **muchos** (unicidad y pluralidad) que se contraponen. Sin embargo, expresiones tales como:

- *Mónica tiene muchos hijos*
- *Mi país tiene muchos habitantes*

coinciden en el uso de **muchos** pero dándonos información sin matices. Tampoco la expresión **muchos** alcanza para diferenciar situaciones donde ha habido transformaciones por agregado o quitado de objetos en que se ve afectada la numerosidad del conjunto. Si Mónica ha tenido más hijos o si en mi país ha habido un incremento en el número de personas, no alcanza con saber que son muchos objetos, hace falta conocer cuántos son para tener una real información sobre el estado de ambas situaciones. Se necesita el concepto de **número natural**.

El conjunto de colores del arco iris es bien diferente del conjunto de los días de la semana, sin embargo comparten una propiedad: el número de sus elementos. Hay tantos colores en el arco iris como días en una semana. Ambas colecciones se pueden poner en correspondencia. Una correspondencia posible (pero no la única) podría ser la siguiente:

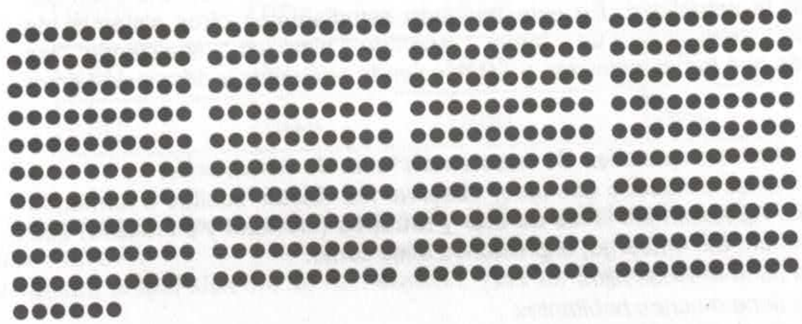
Rojo --- lunes
Anaranjado --- martes
Amarillo --- miércoles
Verde --- jueves
Azul --- viernes
Añil --- sábado
Violeta --- domingo

El hecho de que dos colecciones se puedan poner en correspondencia uno a uno produce como consecuencia que tienen el mismo número de elementos. Matemáticamente ambas colecciones son coordinables o equipotentes y de ello se desprende que comparten la propiedad de numerosidad. Ésta no es una propiedad "visible" por lo que para recordarla podemos acudir a hacernos una imagen de la colección . Aún así, cuando hay más de cuatro o cinco elementos es difícil lograrlo y surge la necesidad de algún tipo de registro. La forma más primitiva de registro fue representar cada objeto del conjunto por medio de los dedos de las manos y si no alcanzaban, también hacían uso de los dedos de los pies y de diferentes partes del cuerpo.

> Numerosas civilizaciones desarrollaron de este modo complejas cartografías corporales numéricas, acompañadas de gramáticas gestuales, en las que los dedos, dispuestos en distintas posiciones, estirados, doblados, curvados, eran los actores principales.[1]

Un registro más perdurable y con posibilidad de abarcar un mayor número de elementos fue utilizar un conjunto de piedras o de muescas en objetos duros tales como huesos y maderas que se correspondían uno a uno con los objetos del conjunto. Estas formas de representación corresponden a sistemas de numeración **figurados** "constituidas por un conjunto de marcas físicas materializadas sobre soportes duros"[2].

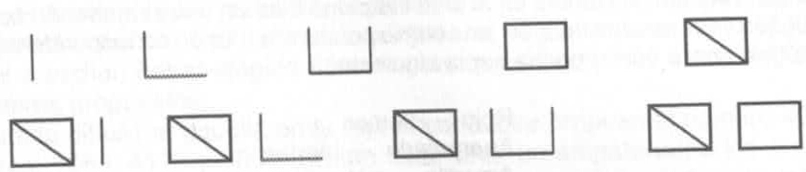
☺ *Si cada punto del dibujo siguiente corresponde a una oveja. ¿Cuántas ovejas hay en el rebaño? ¿Es fácil contarlos?¿Hubo algo que los ayudó?.*



Esta forma de representación cardinal (punto-objeto) es simple pero cuando el número de objetos es considerable, la comparación es complicada. ¿Qué hacer entonces?. Pues lo que seguramente hicieron ustedes para contar: **agrupar**.

☺ *¿Conocen alguien que juegue al Truco?. ¿Cómo se registra el puntaje obtenido por cada jugador?.*

Algunos jugadores de Truco usan los siguientes signos para representar los puntajes de uno a nueve



Este es un sistema de numeración de **agrupamiento simple**.

☺ *¿Qué base de agrupamiento emplea?. Analice ventajas y desventajas de esta forma de representación.*

☺ *Suponga dos números escritos según este sistema de numeración, ¿Con qué criterio los compararía?*

El agrupamiento fue el primer paso hacia la elaboración de sistemas de numeración más "operativos". En el caso de sistemas de numeración figurados aparecieron dispositivos materiales que acudieron a los agrupamientos:

- Guijarros de diferentes formas y tamaños

---

[1] Guedj, Denis - El imperio de las cifras y los números – Ediciones B, S.A. (1998)

[2] Idem

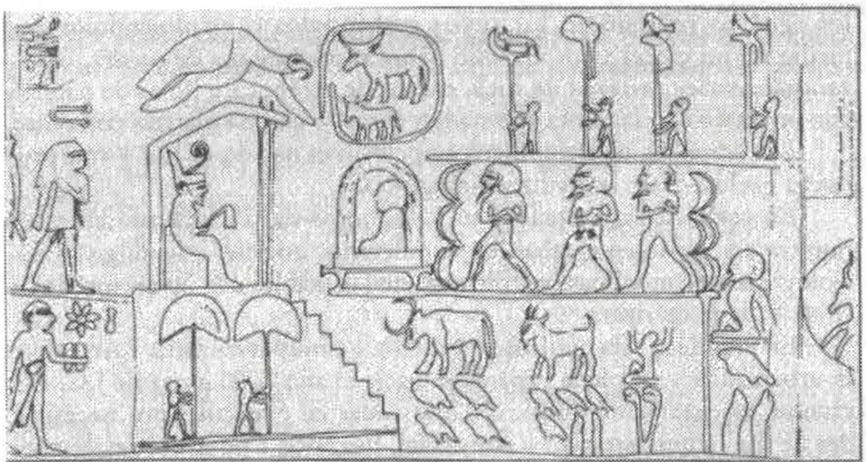
- Cuerdas con nudos
- Bolas y conos fabricados en arcilla
- Tablas para contar
- Planchas de polvo
- Ábacos
- Contadores de bolas

Cada uno de los dispositivos anteriores permitieron registros numéricos de mayor magnitud y con posibilidades de comparación aceptables pero el gran paso hacia la representación numérica fue la invención de los sistemas de numeración **escritos.**

3.1.2 Y los egipcios, ¿cómo hacían?

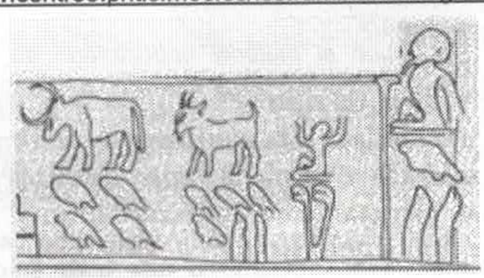
Casi al mismo tiempo que los elamitas y babilonios, alrededor del año 3000 a.C., los egipcios inventaron una escritura y un sistema de numeración escrita.

> Por de Cronto, eran indispensables medios simples para realizar cálculos complicados. Tales necesidades fueron satisfechas desde muy temprano. Existe una maza real en el Ashmolean Museum de Oxford, que es de la época del rey Nar-Mer, anterior a la I Dinastía (antes de 3400 a.C.) que registra la captura de 120.000 prisioneros, 400.000 bueyes y 1.422.000 cabras.
>
> Sarton, G. Historia de la Ciencia (tomo 1). Editorial EUDEBA – 1965



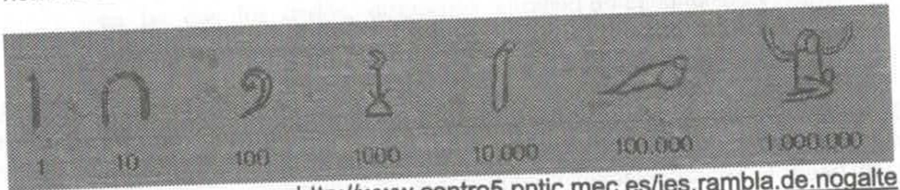
http://www.centro5.pntic.mec.es/ies.rambla.de.nogalte

La información numérica en la maza se encuentra en la parte inferior derecha de la imagen.



☺ *A partir de la información anterior indique qué número representa cada símbolo.*

Además de los símbolos anteriores usaban una barra vertical para representar el 1, un trozo de soga o herradura para representar el diez y una soga u hoja de palmera enrollada en espiral para representar el cien, una flor de loto para el mil, un dedo señalando para el diez mil, un renacuajo para el cien mil y un hombre asombrado o mirando al cielo para el millón.



http://www.centro5.pntic.mec.es/ies.rambla.de.nogalte

> En general se escribían primero las unidades mayores, siguiéndoles las demás en orden de importancia , pero esto no era esencial; podían agruparse en un orden cualquiera que fuese agradable a la vista.[3]

- ☺ *Escriba los siguientes números tal como lo hubieran hecho los egipcios: 46, 58, 60, 99, 126, 3265, 10.002, 999.999 y 1.040.003*
- ☺ *Compare con el sistema anterior. ¿Qué opina en cuanto a la extensión de la escritura?¿Y en cuanto a la base de agrupamiento?*
- ☺ *Si tuviera que explicarle a alguien cómo representar números en sistema egipcio,¿qué le diría?.*

Seguramente advirtió que se trata de un sistema de numeración de **agrupamiento en base diez** y de tipo aditivo ya que para saber qué número está representado en este sistema sólo se necesita sumar los valores de cada símbolo según la asignación anterior.
Para representar un número en sistema egipcio lo expresamos como suma de unos, dieces, cienes, miles...
Por ejemplo: 58 = 10+ 10+10+ 10+10+1+1+1+1+1+1+1+1 o sea

∩ ∩ ∩ ∩ ∩ I I I I I I I I

Cada símbolo se puede escribir nueve veces ya que al agregar uno más se pasa al orden siguiente. En otros términos, la base de este sistema es diez pues cada potencia natural de diez (10^n con n natural) se expresa por medio de un símbolo diferente. Si pensáramos en los símbolos de cada potencia de la base "canjearíamos" diez palos verticales por un arco, diez arcos por una espiral, diez espirales por una flor de loto, diez flores de loto por un dedo señalando, etcétera.

- ☺ *Exprese en sistema egipcio los números 67, 188, 405 y 1.679.*
  a) Sume el primero y el último en el mismo sistema (sin pasar al nuestro), ¿qué reglas utilizaría?
  b) Reste el segundo del tercero en el mismo sistema, ¿qué reglas utilizaría?
- ☺ *¿Conoce el material estructurado de Dienes[4]?. ¿Le permitiría dicho material representar cantidades en egipcio?, ¿cómo lo haría?*
- ☺ *El material formado por fichas redondas, cuadradas y triangulares que aún se utiliza en algunas aulas de primero y segundo grados, ¿serviría para representar números en sistema de numeración egipcio?*

---

[3] Sarton, G. Historia de la Ciencia (tomo 1). Editorial EUDEBA - 1965

[4] Este material consta de cubos de madera de 1 cm de arista para representar las unidades, "barritas " de base cuadrada de 1cm de arista y de 10 cm de largo para representar las decenas, "placas" de 1x10x10 para representar las centenas y cubos de 10 cm de arista para representar las unidades de mil.

3.1.3 Economicemos escritura

La invención del sistema de numeración egipcio representó un gran adelanto en la historia de la escritura de los números. Sin embargo, aun quedaban dos problemas sin resolver:

En este sistema
- ✓ los símbolos inventados no alcanzan para representar <u>todos</u> los números posibles
- ✓ algunas escrituras resultan exageradamente largas (*¿Cómo le fue con 999.999?*).

Para la primera cuestión se podría inventar un nuevo símbolo cada vez que se supere el límite del símbolo de mayor valor.

☺ *¿Es esto una solución? ¿Habrá un último símbolo?.*

Para la segunda cuestión veamos qué propusieron los antecesores de los griegos, a partir del siglo VI a.C.

> Para representar las unidades utilizaban palos verticales y para las potencias de la base, diez, las letras iniciales de las palabras que en su idioma las denominaban, Δ para Deka (diez), **H** para Hekaton (cien), **X** para Xilioi (mil) y M para Myrioi (diez mil). Aparte de ser un sistema cuyos símbolos eran fáciles de aprender a diferencia de lo que ocurría en el sistema jeroglífico egipcio, presentaba alguna novedad.[5]

☺ *Observe cómo se representan en sistema ático los siguientes números y deduzca el papel de Γ*

http://www.centro5.pntic.mec.es/ies.rambla.de.nogalte

☺ *¿A qué conclusión llegó? ¿Qué base tiene este sistema?*

Por supuesto Γ (pente) es un operador que economiza la escritura pues cada vez que actúa sobre una potencia de la base, multiplica la misma por 5 .

La presencia de esta nueva calidad de símbolo (Γ) que constituye un operador multiplicativo hace que el sistema ático sea un sistema de numeración **multiplicativo**. Si bien esto constituyó un avance en cuanto a la extensión de la escritura, no se sostuvo pues los cálculos debían ser realizados con "tablas de contar".

---

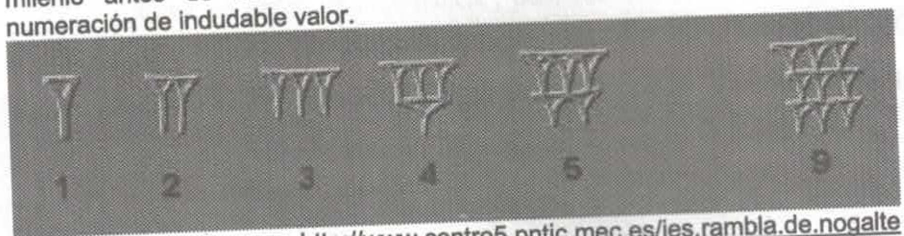
[5] Gómez Alfonso, Bernardo. Numeración y Cálculo – Editorial Síntesis (1993)

☺ *¿Cómo representaría en ático los números 9, 10, 23, 64, 99, 100, 456?*
☺ *¿Se puede determinar si un número es mayor que otro por la cantidad de símbolos usados en su escritura ática?*

Los sistemas de numeración romano y ático son sistemas híbridos. El sistema de numeración romano es aditivo pero en algunos casos no lo es como por ejemplo en IV el valor de I se resta a V. El sistema de numeración ático es multiplicativo sólo para cinco símbolos iguales seguidos, mientras las potencias de la base no superen a cinco es exclusivamente aditivo.

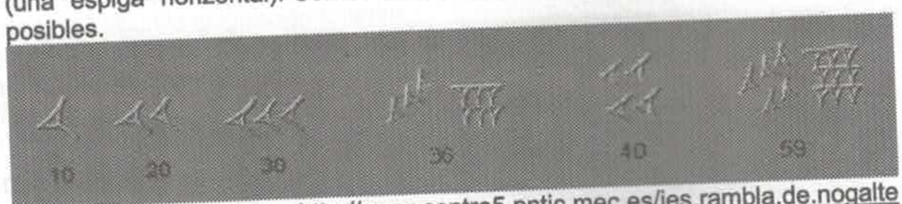
3.1.4 Mucho con tan poco

Volvamos a la primera cuestión planteada en 3.1.3. A comienzos del segundo milenio antes de nuestra era, los babilonios utilizaban un sistema de numeración de indudable valor.



http://www.centro5.pntic.mec.es/ies.rambla.de.nogalte

Escribían sobre tablillas de arcilla húmedas que marcaban con una **cuña**, y representaban los números con dos símbolos: el 1 (un "clavo" vertical) y el 10 (una "espiga" horizontal). Con sólo dos cifras representaban todos los números posibles.



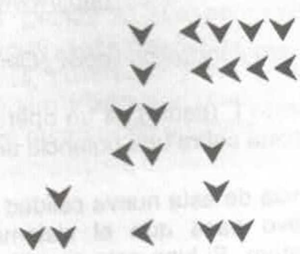
http://www.centro5.pntic.mec.es/ies.rambla.de.nogalte

Los números del 1 al 59 se escribían según un sistema de agrupamiento simple y aditivo.

☺ *¿Cómo escribían, los babilonios, los números 15, 32 y 58?*

Para escribir números mayores que 59 se valían de la posición en que ubicaban los símbolos. En la segunda columna colocaban los símbolos que multiplicaban por sesenta, en la tercera columna multiplicaban por sesenta veces sesenta. Por ejemplo, para representar a:

73 escribían
100 escribían
120 escribían
661 escribían
3601 escribían
7802 escribían



☺ *¿Qué base de agrupamiento tiene este sistema?*
☺ *¿Por qué decimos que este sistema es posicional?*

El sistema babilonio es un sistema **sexagesimal** pues tiene base 60. Para escribir un número en babilonio primeramente debemos "descomponerlo" en sumas de potencias de base sesenta (dividiendo sucesivamente por 60). Veamos con los ejemplos:

$73 = 1 \times 60 + 13$
$100 = 1 \times 60 + 40$
$120 = 2 \times 60$
$661 = 11 \times 60 + 1$
$3601 = 1 \times 60^2 + 1$
$7802 = 2 \times 60^2 + 10 \times 60 + 2$

Es un sistema de agrupamiento en base sesenta y posicional. Habrá notado que la escritura es confusa cuando se necesitan espacios para separar los órdenes como en el caso de 100 y 661 o bien para advertir que un orden no está multiplicado por ningún símbolo como en 120 y 3601.

☺ *¿Qué símbolo hubiera hecho falta?*

3.1.5 ¿Y en América?

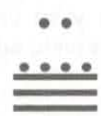
Trasladémonos a América Central. Allí los mayas necesitaron escribir grandes números por su gran afición a la Astronomía. Para ello eligieron una escritura vertical, por niveles; usaban el punto para representar el uno y la raya para representar el cinco. Veamos cómo representaban algunos números:

- 7 se representaba así pues 5 + 2 = 7
(con un solo nivel)

- 11 se representaba así pues 5+5+1 = 11 
(con un solo nivel)

- 19 se representaba así pues 5+5+5+4 = 19 
(con un solo nivel)

- 31 se representaba así pues 11+1x20 = 31 
en dos niveles

- 59 se representaba así pues 19+2x20 = 59 
en dos niveles

- 160 se representaba así pues 0+ 8x20 = 160 
en dos niveles

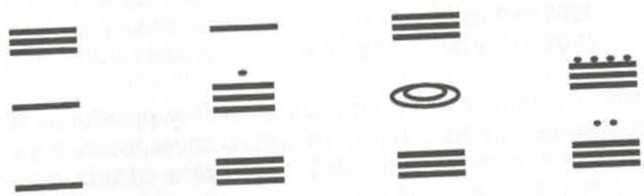
☺ *¿Qué representa el símbolo*  *en este sistema?*
☺ *¿Qué base tiene este sistema?*

Este sistema no tenía símbolos para las potencias de la base gracias a la adopción de los niveles que señalaban un orden en la escritura. Se trata de un sistema **posicional** al igual que el babilonio[6]. El agrupamiento no era regular pues el tercer nivel , en lugar de corresponder a 20x20 unidades correspondía a 18x20 unidades por lo que el segundo nivel sólo se usaba para representar

[6] Los babilonios introdujeron el cero en su sistema de numeración en el siglo III a.C.; lo representaron por medio de una marca cuneiforme inclinada para indicar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto rango. Según el historiador G. Ifrah el cero babilonio fue el más antiguo de la historia

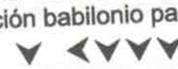
números hasta el 359. Para representar el 360 se colocaba un punto en el tercer nivel y una caparazón en cada uno de los dos niveles inferiores.

☺ *Ordene de mayor a menor los siguientes números pero sin traducirlos a nuestro sistema. ¿Qué criterio empleó?.*



En la historia de la humanidad hubo cuatro sistemas de numeración posicionales: el babilonio, el chino, el maya y el hindú pero fue este último el que reunió las propiedades que lo convirtieron en el mejor de todos y que, introducido y mejorado por los árabes en Europa alrededor del año 770 , se instaló para persistir hasta nuestros días bajo el nombre de sistema indoarábigo.

¿Qué significa que un sistema de numeración es posicional?
Un sistema de numeración es posicional si el valor de los símbolos varía según su ubicación en el numeral o sea si los símbolos tienen valor relativo.
Por ejemplo, en el sistema de numeración babilonio para

73 escribían 

Vemos que , cuyo valor absoluto es 1, en el numeral anterior tiene valor 1 y 60 según esté en el último nivel o en el anterior.

3.1.6 El uso del ábaco

Según el historiador Georges Ifrah los griegos poseían dos sistemas de numeración escrito: el ático (ya descripto) y otro alfabético, aditivo. Ninguno de los dos sistemas resultaba apto para el cálculo por lo que se necesitó del ábaco. Este instrumento no fue exclusivo de los griegos ya que los romanos también lo utilizaron y su uso se extendió hasta la Edad Media en todo el Occidente cristiano, siendo sustituido por los algoritmos escritos que permitía el sistema indoarábigo.

> ...) el célebre Arquímedes (hacia 287-212 antes de Cristo) calculó la cantidad de granos de arena que podría contener "la esfera del mundo" (es decir la esfera cuyo diámetro es la distancia de la Tierra a las estrellas fijas). Encontró un número aproximadamente igual al que podríamos expresar, en nuestro sistema actual, con un 1 seguido de sesenta y cuatro ceros.
> Pero generalmente estos cálculos no se realizaban mediante cifras, ya que ninguna de las dos numeraciones griegas se prestaba a las operaciones aritméticas. Ya hemos visto que los griegos las efectuaban más bien con guijarros o con fichas sobre ábacos, un tipo de tableros en las que los distintos órdenes decimales estaban separados en columnas previamente trazadas.

Es interesante la lectura de este párrafo ya que muestra cómo el uso del ábaco no insita (aún en sabios matemáticos), la invención de un sistema de numeración escrito que refleje el principio de posición, la base y el cero que este tipo de instrumento de cálculo posee. Cabe preguntarse: ¿vale la pena el esfuerzo de algunos docentes en utilizar el ábaco en sus clases si, históricamente no contribuyó a la aparición de los sistemas posicionales escritos? ¿Puede un niño que comienza a usar la numeración comprender la analogía entre el ábaco (sistema figurativo) y el sistema indoarábigo (sistema escrito)?. ¿No será excesivo el tiempo que requiere enseñar a usar el ábaco? Y si en lugar de ello, ¿comenzamos a trabajar con las regularidades del sistema de numeración indoarábigo que se advierten trabajando con porciones de la serie numérica?.

3.1.7 El sistema indo arábigo

El sistema de numeración escrito que usamos en la actualidad es el sistema de numeración indoarábigo. Se trata de un sistema de numeración altamente eficaz ya que permite:

- representar todos los números con un número finito de símbolos
- comparar con reglas muy sencillas el tamaño de los números a través de su representación
- realizar cálculos con sencillez

Este sistema emplea diez cifras cuyos aspectos han ido evolucionando a lo largo de la historia hasta el que hoy muestran:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cada una de ellas funciona como operador multiplicativo y tiene un grafismo propio que lo diferencia de los demás. Las dos leyes: de agrupamiento y de posicionalidad que lo caracterizan, originan su óptimo funcionamiento pero a la vez son fuente de dificultades en su adquisición. La base de agrupamiento es diez; los órdenes inmediatos guardan una relación 10 a 1. La decena equivale a diez unidades simples, la centena equivale a diez decenas, la unidad de mil equivale a diez centenas, la decena de mil equivale a diez unidades de mil, y así siguiendo. La ley de posición evita la explicitación de la multiplicación por la potencia de la base. En lugar de escribir, por ejemplo,

4x1000 + 5x100 + 2x10 + 7 escribimos solamente 4527.

Observe el lector que el orden en que escribimos las cifras es fundamental para saber a qué potencia de la base multiplica. En cambio, en la escritura polinómica esto no es relevante ya que, por ejemplo:

4x1000 + 5x100 + 2x10 + 7 = 4x1000 + 2x10 + 5x100 + 7.

☺ *Sin calcular las unidades simples,*

1. *¿a cuántas centenas equivalen 45 decenas de mil?*
2. *¿a cuántas decenas de mil equivalen 34 centenas de millón?*
3. *¿a cuántas unidades de mil de millón corresponden 196.000.000 unidades de mil?*
4. *¿a cuántas decenas equivalen 2 unidades de billón?*
5. *¿a cuántas decenas de mil de millón equivalen 45 trillones?*

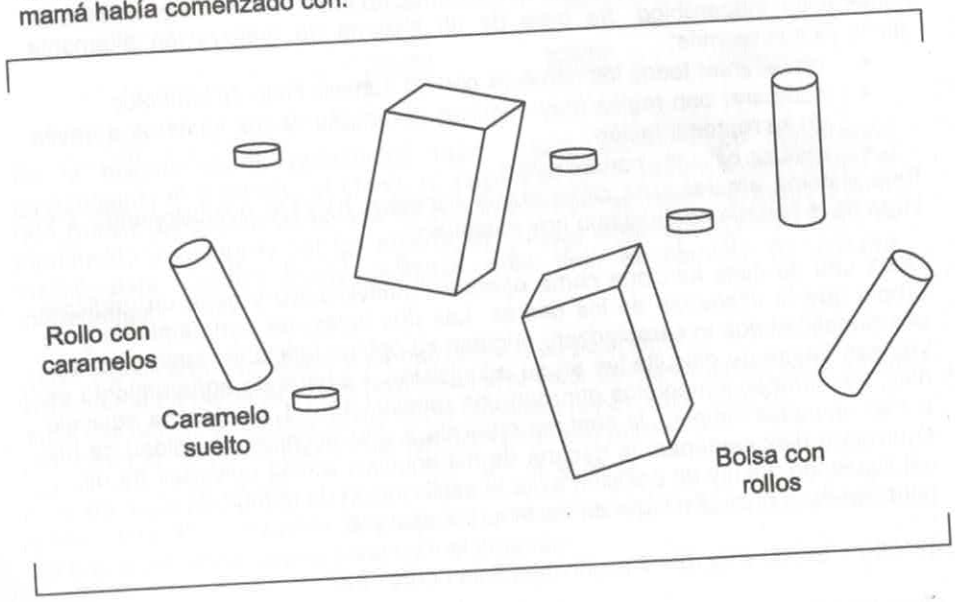
☺ *Compare todos los sistemas de numeración estudiados en cuanto a si son:*

- ✓ *Figurados, orales o escritos*
- ✓ *Aditivos, multiplicativos, posicionales*
- ✓ *¿Permiten representar cualquier número?*
- ✓ *¿Cuál es su base de agrupamiento?*
- ✓ *Agregar un cero al final de un numeral, ¿multiplica el numeral por la base?*

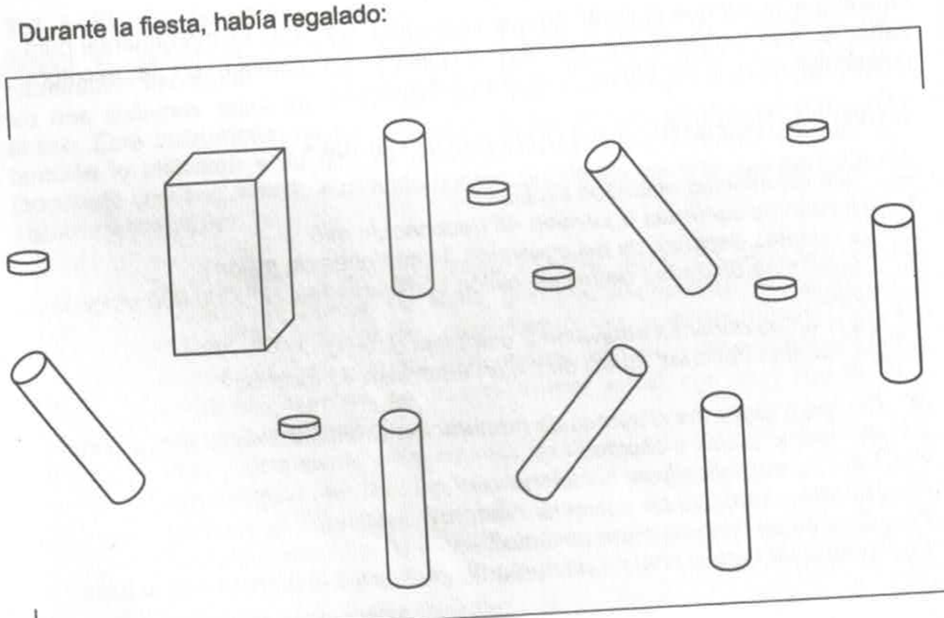
La comprensión de la idea de agrupamiento sin recurrir a la simbolización mediante cifras ha sido investigada por Bednarz y Janvier (1979,1982). Los especialistas les plantearon a niños de 8 a 9 años, un problema y observaron las estrategias desarrolladas por los mismos.

Les plantearon a los niños un problema, valiéndose de materiales concretos, en forma de caramelos de menta. Estos caramelos podían venir sueltos, empaquetados en envoltorios cilíndricos (rollos) , y en bolsas compuestas por rollos, objetos que los niños podían manipular.

Con tal material disponible, les informaron que la mamá había comprado caramelos sueltos. Los había preparado en rollos y bolsas cuyo contenido eran rollos, para dar una fiesta. No se mencionó el número de caramelos por rollo ni el número de rollos por bolsa. A través de un dibujo les informaron que la mamá había comenzado con:



Durante la fiesta, había regalado:



El niño debía dibujar lo que le quedaba.
Para resolver este problema es indispensable conocer el contenido de cada rollo y bolsa. El procedimiento consiste en abrir un rollo y contar los caramelos, como así también abrir una bolsa y determinar el número de rollos contenidos. Bednarz y Janvier informaron que solamente un 40% de los niños dieron signos de comprender la necesidad de tal información, ya fuera inventando tales

números, preguntando al entrevistador o constatando personalmente los datos necesarios. Hubo dos clases de estrategias: asociar un número a cada colección de caramelos (estrategia A) o "abrir" los paquetes (estrategia B). Los niños pudieron agruparse en cuatro grupos:

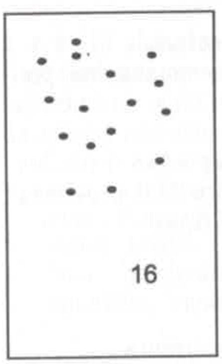
> Grupo 1:
> Algunos de ellos no asociaron el número correcto: al contar, confundieron rollos y caramelos o bolsas con rollos.
> Grupo 2:
> Algunos tropezaron con dificultades, porque operaron solamente con las bolsas o los rollos, o jugaron simultáneamente con las bolsas y los rollos.
> Grupo 3:
> El 15% efectuó una asociación numérica correcta y (se dio cuenta de que) efectuó debidamente el cómputo.
> Grupo 4:
> El 15% abrió correctamente rollos y bolsas, tomando "prestados" los artículos necesarios para que la operación fuera posible.[7]

Los grupos 1 y 3 emplearon la estrategia A, los grupos 2 y 4 emplearon la estrategia B.
Ante estas investigaciones cabe preguntarse en qué medida el niño del primer ciclo comprende el trabajo de agrupamiento que se realiza con materiales tales como fichas, palillos, etcétera y su relación con el sistema de numeración decimal posicional.

La otra ley que rige el sistema de numeración indoarábigo es la posicionalidad, es decir que cada cifra tiene un valor relativo dado por el lugar que ocupa dentro del numeral. Tomemos como ejemplo el 7.379. Este número está representado por las cifras 3,7 y 9. La cifra 7 aparece repetida. El 7 de la izquierda tiene valor relativo 7.000 y el segundo 7, tiene valor 70.

☺ *¿A qué es igual la suma de los valores relativos entre el 6 subrayado y el que está en negrita en el numeral 236.560.43**6**.311?*

Con respecto a la posicionalidad, Constance Kasuko Kamii en su libro "El niño reinventa la aritmética" pone en evidencia la dificultad en su adquisición. Para estudiarla propone una actividad que describe así:



(a)

> El procedimiento era el siguiente:
> Extendía dieciséis fichas y pedía al niño que las contara y que hiciera un dibujo de "todas éstas". Los niños las dibujaban o bien en línea o bien amontonadas como muestra la figura (a)
> Le pedía al niño que escribiera "dieciséis" con números en la misma hoja, para indicar que había dieciséis fichas.
> Le preguntaba al niño qué significaba "esta parte" mientras (yo) rodeaba con un círculo el 6 del 16, como se muestra en la figura (a) y le pedía que indicara en el dibujo qué significaba el 6. Le preguntaba al niño qué significaba "esta parte" mientras (yo) rodeaba con un círculo el 1 del 16, como se muestra en la figura (a) y le pedía que indicara en el dibujo qué significaba el 1.
> Finalmente le preguntaba al niño qué quería "todo entero" mientras (yo) rodeaba con un círculo el 16, y comprobaba las relaciones establecidas por el niño entre 16, 1 y 6. Por ejemplo,

[7] Dickson,L.; Brown,M.; Gibson,O. El aprendizaje de las Matemáticas - Editorial Labor (1991)

cuando un niño rodeaba con un círculo todos los objetos, le preguntaba porqué éstos (los nueve de la parte superior izquierda) no estaban rodeados por un círculo.

☺ *Lo invitamos a que reproduzca la actividad anterior con niños de 2° año de EGB en adelante, sin variar las condiciones ni las preguntas y registrando sus respuestas. ¿Qué ocurre?. ¿A qué conclusión llega?*

Pese a los esfuerzos de los docentes por trabajar la decena en primer grado, los niños no logran comprender que el 1 del 16 no es 1 sino 10. Ante estos resultados que se repiten en porcentajes altísimos podemos repensar estas prácticas a la luz de la historia de los sistemas de numeración. Si los primeros sistemas de numeración fueron aditivos y la posicionalidad tardó en instalarse: ¿no podríamos posponer su tratamiento hasta que los niños logren un buen manejo de los números en descomposiciones puramente aditivas?. La descomposición en unidades, decenas, centenas, etcétera, es necesaria cuando queremos justificar el algoritmo convencional de las operaciones. Si no presentamos esta descomposición los niños igualmente podrán operar pero desde un cálculo no algorítmico apoyado en relaciones entre ellos. Por ejemplo, para calcular 45 + 28 el niño, con un adecuado trabajo sobre las relaciones entre los números, puede proponer

$40 + 20 = 60$

$5 + 8 = 13$

$60 + 13 = 60 + 10 + 3 = 70 + 3 = 73$.

La comprensión de las leyes que rigen nuestro sistema de numeración no se logra sólo con la edad. A través de diagnósticos realizados a nuestros alumnos de Profesorado de EGB1 y 2, hemos comprobado que más de la mitad de los ingresantes no saben leer números del orden de los billones y ante la pregunta: ¿cuántas unidades de mil tiene el número 34.566.890?, un número significativo responden que tiene 566 unidades de mil desestimando los órdenes mayores.

3.2 Sistemas de numeración orales

Antes de que el hombre inventara los sistemas de numeración escritos, utilizó sistemas de numeración orales. Sabemos que nuestros niños también comienzan por el uso del sistema oral antes de llegar a comprender y usar el escrito. La lengua de nuestros antepasados indígenas nos resultará de interés para conocer ejemplos de sistemas orales diferentes del nuestro y así poder analizar sus propiedades.

3.2.1 Los sistemas de numeración orales mapuche y quechua

Conozcamos algo acerca de los sistemas de numeración empleados por mapuches y quechuas.

Conocimos los nombres que usaban los **mapuches** para los números a través de la hija de un querido maestro de la provincia de Neuquén, Eduardo Alizeri. Aquí se los mostramos:

1 quiñé	2 epú	3 quilá
4 melí	5 quechú	6 cayú
7 reglé	8 purrá	9 aillá
10 marí	100 pataca	1.000 huarranca
10.000 mari huarranca		100.000 pataca huarranca

Para decir 14 decían marí melí y para 33 quilá marí quilá

☺ *¿Cómo cree que se dice 27?, ¿y 358?, ¿y 6.501?*[8]

[8] Eguiluz, L.. Pujadas, M. Sexto.mate - Editorial Grafos XXI (2001)

☺ *¿Qué propiedades considera ud. que tiene el sistema de numeración oral mapuche?*

En el sistema de numeración quechua[9], los nombres de los números del 1 al 9 son: **huk, iskay, kinsa, tawa, pichqa, suqta, qanchis, pusaq, isqun.** Los siguientes números son:

10: chunka
11: chunka hukniyuq
12: chunka iskayniyuq
13: chunka kinsayuq
14: chunka tawayuq
15: chunka pichqayuq
16: chunka suqtayuq
17: chunka qanchisniyuq
18: chunka pusaqniyuq
19: chunka isqunniyuq

20: iskay chunka
21: iskay chunka hukniyuq
22: iskay chunka iskayniyuq
23: iskay chunka kinsayuq
24: iskay chunka tawayuq
25: iskay chunka pichqayuq
26: iskay chunka suqtayuq
27: iskay chunka qanchisniyuq
28: iskay chunka pusaqniyuq
29: iskay chunka isqunniyuq

De la misma manera se resuelven las escrituras de las familias de los treinta, cuarenta, cincuenta hasta noventa. Sólo daremos tres ejemplos:

36: kinsa chunka suqtayuq
74: qanchis chunka tawayuq
99: isqun chunka isqunniyuq

El número cien se dice **pachak** y del mismo modo se dice:
336: kinsa pachak kinsa chunka suqtayuq
674: suqta pachak qanchis chunka tawayuq
999: isqun pachak isqun chunka isqunniyuq

El número mil se dice **waranqa,** millón se dice **hunu** y billón se dice **hunu hunu.**

☺ *¿Cómo cree que se dice en quechua 43.527?, ¿y 358.903?, ¿y 6.501. 799?*
☺ *¿Qué propiedades tiene el sistema de numeración oral quechua?*

Estos sistemas de numeración orales son muy "regulares" en cuanto a la formación de las palabras-números.

3.2.2 El sistema de numeración oral castellano

Analicemos nuestro sistema de numeración oral. Para representar los números naturales en el sistema de numeración oral empleamos las siguientes palabras del idioma castellano:

- uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve , diez,
- once, doce, trece, catorce, quince
- veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa
- cien, quinientos, setecientos, novecientos, mil, millón, billón, trillón, cuatrillón, quintillón...

Los números mayores que quince se expresan en forma aditiva como diez más..., decimos dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve. En el caso de los números del once al quince tienen el sufijo **ce** que indica que hay que sumar diez al número que indica el prefijo, por ejemplo: tres (tre) más diez (ce). Pero

[9] Esta información nos fue suministrada por el profesor Enrique Doerflinger de la Facultad de Lenguas de la Universidad Nacional de Córdoba, a quien agradecemos.

esta diferencia complica la memorización por lo que algunos niños dicen dieciuno, diecidos, diecitres, diecicuatro y diecicinco manteniendo el criterio usado para los restantes números y evidenciando cierta regularidad que el sistema de numeración oral castellano, para éstos, no cumple.

☺ *Compare nuestro sistema oral con el sistema quechua, ¿qué analogías y diferencias presentan?*

☺ *¿Cuál cree que es más sencillo de aprender?¿Por qué?*

Sigamos con la serie, veinte también es irregular respecto de las restantes decenas y también es motivo de dificultades en la memorización. El nombre de las decenas tiene la particularidad de expresarse en forma multiplicativa ya que el sufijo **enta** significa que hay que multiplicar por 10 el número que indica el prefijo, por ejemplo: siete (set) dieces (enta).
Las centenas, millares, millones ... se nombran combinando las palabras uno, dos, tres,... hasta nueve con la palabra cientos (a excepción de quinientos, setecientos y novecientos), con mil, con millones que representan las potencias naturales de 10. Algunas veces se hace uso de la adición, otras veces de la multiplicación o de ambas simultáneamente. Por ejemplo:

- ✓ Mil seis 1.000 + 6
- ✓ Seis mil 6 x 1.000
- ✓ Cuatrocientos mil millones doscientos setenta mil noventa y seis
  4x100.000.000.000 + (2x100+7x10) x1.000 + 9x10 + 6

Vemos en el primer y segundo ejemplos que al cambiar el orden de los términos cambia la operación a realizar. Las excepciones de un sistema de numeración dificultan su adquisición. Nuestro sistema de numeración oral es un sistema de base diez, aditivo, multiplicativo y no posicional..

3.2.3 ¿Cómo van constituyendo los niños la serie oral?

El recitado de la sucesión de números naturales, o más brevemente de la serie numérica, es una de las actividades que los niños realizan tan precozmente como se los estimule a hacerlo. Su adquisición depende en gran medida de lo lingüístico. Muchos niños inician la escolaridad obligatoria con algún conocimiento de la misma. Este conocimiento no es menor ya que, al ser aplicado al conteo, constituye la primera herramienta para resolver problemas.

> Fuson y Hall (1983), Fuson, Richard y Briars (1982) encuentran que, iniciada desde los dos años, la cadena verbal alcanza aproximadamente 100 hacia el final del primer año de escolaridad o el comienzo del segundo, lo que va en general más allá de lo que es enseñado. El estudio de las producciones "espontáneas" obtenidas en respuesta a incitaciones del tipo "muéstrame hasta dónde sabes contar" revela que las perfomances comportan, en todos los niveles, tres partes:
> a) una porción convencional y estable equivalente a la adulta,
> b) una porción estable (i.e. regularmente utilizada por el niño) pero que no corresponde a las normas (números salteados...)
> c) una porción ni estable ni convencional.
> Poco a poco, a lo largo del desarrollo, (a) se vuelve cada vez más importante por el hecho del pasaje (b) a (a) mientras que las porciones del tipo (c) se transforman en (b).[10]

Conocer la serie numérica no se reduce exclusivamente a enunciarla partiendo desde el uno y en forma creciente, también involucra:

[10] Fayol,M. Número, numeración, enumeración:¿Qué se sabe de su adquisición?-Revue Francaise de Pedagogie N° 70, 1985 pp59-77 Traducción: Capdevielle, B. Varela, L. Willson, P.

- ✓ continuarla a partir de un número cualquiera en forma creciente (*cuatro*...cinco, seis, siete, ocho, etcétera) o decreciente (*nueve*...ocho, siete, seis, cinco, etcétera)
- ✓ enunciarla hasta un término dado (no pasar de largo)
- ✓ decir el antecesor y el sucesor de un término dado.

> La cadena numérica aparece pues primero como una herramienta utilizable para contar, herramienta que se perfecciona, se completa, se extiende y se flexibiliza gradualmente. Luego, en una etapa ulterior, y sin duda allí también progresivamente, las "palabras" de los números se vuelven ellas mismas objeto de conteo.[11]

☺ *Proponga a niños de 5 ó 6 años las siguientes actividades registrando lo que dicen*[12]*:*

Número anunciado

1. *¿Hasta qué número sabés contar?*

Recitado de la serie numérica (Anote si lo ayuda a continuar y en qué término de la serie)

2. *Contá...*

☺ *¿En qué etapa se encuentran sus entrevistados?.*

3.2.4 ¿Qué diferencia hay entre recitar la serie numérica y contar una colección?

Conocer la serie numérica oral es requisito para poder contar una colección. El conteo es una relación que se establece entre los n primeros términos de la serie numérica y los objetos de una colección. Es necesario que se respete la biyectividad o correspondencia uno a uno, en sus dos condiciones:

a) Exclusividad

Quien cuenta debe mantener el ritmo entre lo que dice y la señalización del objeto. Hemos observado cómo algunos niños "cuentan" así:

uno dos tres cuatro cinco seis siete ocho nueve

Enuncian bien la serie numérica pero no establecen la correspondencia uno a uno entre cada "palabra-número" y los objetos de la colección por contar.

b) Exhaustividad

Los objetos deben ser contados en su totalidad. Esto impone tener control sobre los objetos ya contados y los no contados. Poder mover los objetos, que estén organizados linealmente, rectangularmente, en constelaciones o por grupos de igual número de elementos, facilita este control.

> El esquema de enumeración consiste en un conjunto organizado de gestos, de percepciones y de emisiones vocales. La estabilidad descansa en dos principios matemáticos: el de biyección y el de cardinalidad.[13]

---

[11] Idem anterior

[12] del Diagnóstico para preescolar y primer grado en "Los niños, los maestros y los números"- Municipalidad de la ciudad de Bs. As. (1994) Proyecto a cargo de C. Parra con asesoramiento de I.Saiz

[13] Laborde, C.;Vergnaud, G. Aprendizajes y didácticas: ¿qué hay de nuevo?-Capítulo El aprendizaje y la enseñanza de la matemática Editorial Edicial

Volveremos sobre el conteo y su relación con el concepto de número más adelante.

3.2.5 ¿Para qué sirven los números naturales?

Basta con ver a nuestro alrededor para advertir que vivimos en un mundo de números. Veamos:

- ✓ Queremos ir a la casa de un amigo y averiguamos que vive en la calle San Martín n° 689, 5° piso departamento 3
- ✓ Al pasar por un negocio vemos que venden un televisor de 20 pulgadas a muy bajo precio pero sólo tienen 157aparatos en stock siendo su código 045006703221
- ✓ Leemos en el diario que nuestro equipo de fútbol preferido está ubicado en la 6° posición
- ✓ ¿Me alcanzará el dinero que llevo para comprar esa revista y algunas golosinas?.

Como vemos, los números sirven para ubicar, medir, cardinalizar, identificar, ordenar, calcular.

☺ *¿Qué función cumplen los números en las situaciones anteriores? ¿Podría agregar algún uso más?*

> Cuando llegan a la escuela , los niños ya elaboraron conocimientos matemáticos a raíz de las múltiples situaciones que enfrentan en la vida cotidiana y del contacto que tienen con prácticas y objetos culturales. En general, ya distinguen los números de las letras, ya conocen varios números e incluso saben que 3 es más que 2.[14]

Los niños de los primeros grados inicialmente pueden trabajar con los números como:

- ♦ Memoria de la cantidad

Consiste en la posibilidad de evocar una cantidad sin que ésta esté presente

- ♦ Memoria de la posición

Recordar el lugar ocupado por un objeto en una lista ordenada, sin tener que memorizar toda la lista

- ♦ Recurso para anticipar

Posibilidad de anticipar los resultados a propósito de situaciones no presentes o no realizadas pero sobre las cuales se tienen ciertas informaciones.

De "Los niños, los maestros y los números" (obra citada)

☺ *Continúe el diagnóstico. Prepare una colección de cubos o fichas con una cantidad menor al número que su entrevistado sabe contar.*

3. *¿Me podés decir cuántos hay?*

En el caso en que el niño no haga nada se le puede decir: -*si querés, podés moverlos*-.
Si el niño no concluye con un número se le puede decir: -*entonces, ¿cuántos hay?*-

☺ *Prepare una colección con 10 objetos más y una caja vacía*

4. *Poné en esta caja dieciséis objetos* (Ud. puede variar el número según el conocimiento que tiene el niño de la sucesión natural)

En el caso en que el niño sobrepase el número pedido pregúntele:

¿Te acordás lo que te pedía?. Tenés que poner en esta caja justo dieciséis objetos.

5. *Ahora pongo uno más, ¿cuántos cubos hay?*

---

[14] Parra, C., Saiz, I. Libro para el docente de Hacer Matemática 1 – Editorial Estrada

6. *Contá los cubos que hay –agregue tres y pregúntele- ahora, ¿cuántos hay?*

¿Vuelve el niño a contar o es capaz de contar a partir del primer número sin necesidad de empezar de nuevo?. Esta última actividad permite averiguar si el niño utiliza el sobreconteo para determinar el número de objetos una vez agregados algunos más.

☺ *Prepare un cartón con tantos círculos dibujados como el número hasta el que sabe contar el niño y mayor cantidad de cubos.*

7. *Acá tengo un cartón con círculos y allá hay cubos. Tenés que poner un cubo sobre cada uno de los círculos. Andá a buscar justo los que te hacen falta sin que te sobre ni falte ninguno. Tenés que hacer un solo viaje*[15]

¿Usa el conteo como herramienta para recordar la cantidad de círculos (memoria de la cantidad)?

La información recogida a partir de las siete preguntas anteriores le permitirán diagnosticar los conocimientos elaborados por niños de nivel preescolar o primer grado al iniciar la escolaridad. Como habrá advertido se refieren al conocimiento de la serie numérica y del conteo. Constituyen el punto de partida para la preparación de situaciones de aprendizaje que atiendan a esos conocimientos previos.

3.3 ¿Cómo construyen los niños la serie numérica escrita?

La serie presentada en el problema **Completando la serie** posee interesantes regularidades que permiten descubrir los elementos faltantes y extenderla. Del mismo modo, la serie numérica escrita indoarábiga también posee regularidades semejantes que los niños pueden descubrir por sí mismos o a través de situaciones que se les planteen. Tales regularidades son consecuencia de las leyes del sistema.

> Es importante remarcar la idea de que el trabajo sobre las regularidades es una aproximación a la comprensión del sistema posicional. Una aproximación centrada en cómo aparece, cómo se presenta en la oralidad y en la escritura, en los algoritmos para producir números. Se debe tener presente que es justamente la organización posicional la que instala un aspecto algorítmico en la escritura de los números, aspecto que puede ser aprendido por los niños aún sin comprender todavía la estructura profunda del sistema.[16]

Con respecto a esta aproximación de los niños son valiosísimas las investigaciones realizadas por Delia Lerner y Patricia Sadovsky con la colaboración de Susana Wolman, presentadas en el capítulo: El sistema de numeración: un problema didáctico[17], cuya lectura recomendamos especialmente. En él, las autoras confirman que "los niños construyen tempranamente criterios para comparar números mucho antes de sospechar la existencia de centenas, decenas y unidades" y que "la construcción de la notación convencional no sigue el orden de la serie, aunque ésta desempeñe un papel importante en esa construcción". Con respecto a los criterios de comparación pueden resumirse en las dos afirmaciones siguientes:

---

[15] del Diagnóstico para preescolar y primer grado en "Los niños, los maestros y los números"- Municipalidad de la ciudad de Bs. As. (1994) Proyecto a cargo de C. Parra con asesoramiento de I.Saiz

[16] Diseño Curricular de Matemática para EGB de la Ciudad de Buenos Aires

[17] Parra,C. Saiz,I. (compiladoras) Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones. Paidós Educador. 1994

- Si dos números tienen distinto número de cifras, es mayor el que tiene más cifras

Con este criterio 261 es mayor que 98 porque el primero tiene tres cifras y el segundo, dos.

- Si dos números tienen igual número de cifras, para determinar cuál es el mayor hay que fijarse sólo en la primera cifra (no hace falta ver las cifras restantes). En caso de ser iguales, pasar a la siguiente.

Con este criterio 64 es mayor que 39 porque 6 es mayor que 3, 456 es mayor que 428 porque 5 es mayor que 2.

La instalación de tales criterios es paulatina y es común advertir que, aún cuando la sostengan para muchos números, pueden fallar en su generalización. La investigación revela también que, aún cuando se trate de alumnos a los cuales se les ha enseñado "la decena", no utilizan este conocimiento para justificar sus afirmaciones.

Con respecto a la escritura, las investigaciones revelan que los niños se apropian en primer término de la escritura convencional de los nudos (decenas exactas) y luego de los números intermedios. Las escrituras de estos últimos se apoyan sobre la numeración hablada. Por ejemplo para escribir doscientos dieciocho muchos niños escriben 20018. Sin embargo, estas escrituras ligadas a la numeración oral se enfrentan a los criterios de comparación y la reflexión sobre las mismas ante la contradicción que provocan da lugar a los ajustes que permiten llegar a la escritura correcta.

Para las investigadoras la conceptualización del sistema de numeración es un proceso con respuestas provisorias que va avanzando en la medida en que el niño enfrenta situaciones que le permiten establecer nuevas relaciones.

☺ Prepare un conjunto de cartones con un número del 0 al 10 escrito en cada una (preescolar) o hasta el 30 (primer grado)

7. *¿Conocés algo de lo que está escrito en los cartones?*

☺ Si reconoce que se trata de números anote las cartas en el orden que va diciendo el niño y tal como él los nombra (aún las erróneas)

8. *¿Qué números son?*[18]

3.4 *Número y sistema de numeración*

Hemos visto que los sistemas de numeración tienen por finalidad la representación de los números. Desde un punto de vista matemático, primero se define el concepto de número y luego, el sistema de numeración. Sin embargo cabe preguntarse si los niños siguen el mismo orden en cuanto a su adquisición. Tal como lo plantean algunos estudiosos del tema, el número es un objeto matemático que remite a un cierto número de relaciones lógico-matemáticas (seriación, iteración, adición, etcétera) que debe construir el sujeto. El sistema de numeración es un producto cultural necesario para resolver problemas. El Dr. Gerard Vergnaud propone distinguirlos con cuidado si se quiere estudiar a fondo los diferentes obstáculos que se deben superar.

> No hay que confundir el número con su representación escrita(...) El número es un concepto, para el cual existen varios sistemas posibles de escritura; la numeración posicional en base diez es uno de ellos. Vimos (...) algunas dificultades afrontadas por los niños en la adquisición de la noción de número; éstas se encuentran

[18] del Diagnóstico para preescolar y primer grado en "Los niños, los maestros y los números"- Municipalidad de la ciudad de Bs. As. (1994) Proyecto a cargo de C. Parra con asesoramiento de I.Saiz

esencialmente en el nivel de concepto, aunque rápidamente interfieren con las dificultades propias del sistema de numeración y de las operaciones que la acompañan.

En cambio, el sistema de numeración es un soporte de la conceptualización, y sería imposible, por ejemplo, hablar de grandes números o de números decimales sin el recurso de su representación escrita.

3.4.1 Investigaciones sobre el desarrollo del concepto de número

El más destacado investigador sobre el desarrollo del concepto de número en los niños fue Jean Piaget quien a mediados del siglo XX realizó trabajos de investigación que constituyen los pilares de Escuela de Ginebra. Para explorar la comprensión de la cardinalidad, Piaget ideó experiencias que pusieran en juego la propiedad de equipotencia de dos conjuntos dados o sea el número de elementos de cada colección. Las experiencias involucraban correspondencias

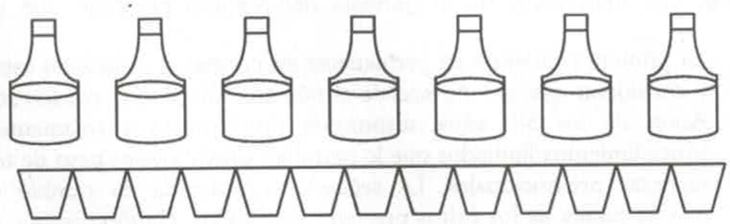
a) entre botellas y vasos
b) entre floreros y flores
c) entre huevos y copas para huevos
d) entre monedas y objetos
e) entre piezas de una figura armada y piezas sueltas de una figura igual

En todos los casos se colocaban los elementos de la primera colección en una mesa. Seguidamente se proponía al niño que buscara el mismo número de elementos de la segunda colección y que los colocara evidenciando la correspondencia uno a uno. Por ejemplo, en el caso a), se colocaban las botellas (6 ó 7) sobre una mesa y se le solicitaba al niño que tomara de una bandeja con vasos, tantos como botellas, uno por cada botella. El niño debía ponerlos en correspondencia, por ejemplo, poniendo un vaso delante de cada botella. Si tomaba de más o de menos se le preguntaba -¿te parece que son los mismos?- hasta que el niño asintiera (equivocadamente o no). Una vez establecida la correspondencia, se agrupaban los vasos y se le volvía a preguntar -¿hay tantos vasos como botellas?- y si respondía que no, se le preguntaba -¿dónde hay más?- y -¿por qué hay más?-.

Las respuestas de los niños dieron lugar a la identificación de tres estadios:

Estadio I:

En este estadio los niños no podían poner en correspondencia las dos colecciones. Por ejemplo, en el caso de las botellas y los vasos, ponían los vasos así:

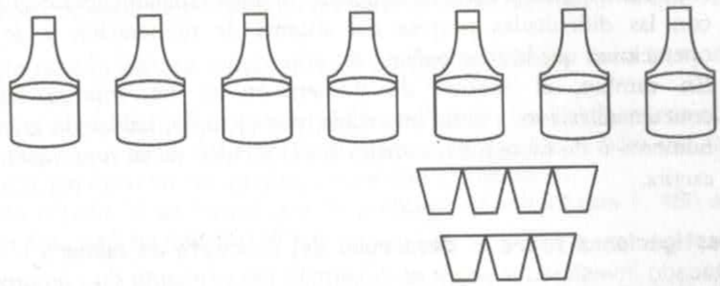


La mayoría de los niños tenían de cuatro a cinco años.

Estadio II:

En este estadio, los niños lograban establecer la correspondencia biunívoca pero ante la transformación por reagrupamiento o distanciamiento de los elementos, consideraban que el número de elementos había cambiado. La mayoría de los niños tenían de cinco a seis años.

[19] Vergnaud, Gerard . El niño, las matemáticas y la realidad - Editorial Trillas (1991)



Estadio III:
En el estadio final, los niños no sólo eran capaces de establecer las correspondencias sino que podían dar explicación acerca de porqué el número de elementos no variaba. Los niños de este estadio tenían al menos cinco años y medio. Es decir que los niños de este estadio lograban la conservación del número. Con respecto a la numeración hablada, Piaget no la consideraba de significación en cuanto a la construcción del número sino una imposición del medio social.

> Sin embargo, algunos años más tarde, Grèco (1962) pone en evidencia un hecho curioso. Estudiando paralelamente los juicios de conservaciones numéricas, llamados de cuotidad (respuesta a la pregunta ¿cuántos...?) y los de cantidad (¿donde hay más de...?) comprueba que los primeros anteceden siempre, cualquiera sea la tarea, a los segundos. De allí concluye que no se trata, como lo concebía Piaget, de una simple certeza verbal, sino verosímilmente de cuasi-números de status cardinal. Esto lo lleva a asignar cierto rol a la enumeración.
> (...) El trabajo realizado por Grèco ha contribuido así a señalar un nuevo problema, el de las relaciones entre el acceso tardío a la conservación y las actividades relativamente precoces de conteo.[20]

Según comenta M. Fayol, los investigadores Fuson, Secada y Hall (1983) demostraron que tanto el conteo previo como la correspondencia visualizada tienden a aumentar de manera muy importante la frecuencia de las respuestas de conservación. Por otra parte, algunos investigadores no aceptan, tal cual, la concepción de Piaget pues consideran que les exige a los niños un dominio de las nociones estudiadas y una aptitud para evocarlas y manipularlas verbalmente. Los estudiosos de la génesis del número plantean dos tesis opuestas.

> La primera consistiría en permanecer en un marco piagetiano estricto y considerar que el niño accede al número sólo con la conservación. Antes de los 5-6 años, dispondría simplemente y solamente de procedimientos limitados que le permitan éxitos locales pero de todas maneras pre-nocionales. La segunda consideraría en cambio que, habida cuenta de los éxitos precoces verificados, el niño dispone muy tempranamente de todos los componentes necesarios para desarrollar los conceptos numéricos. Pero su capacidad restringida de procesamiento de la información le haría muy difícil la resolución de problemas referidos a conjuntos numéricos elevados por no poder coordinar, manejar (self-monitor) los diferentes componentes implicados.

---

[20] Fayol, Michel. Número, numeración, enumeración: ¿qué se sabe de su adquisición?. Revue francaise de pedagogie N° 70 (1985)
[21] Idem anterior

3.5 Repuestas

3.1.1

- (página 14) Ayudó la organización rectangular de los puntos. El sistema de representación numérica usado en el Truco hace agrupamientos de cinco unidades. Esto favorece la percepción numérica.

3.1.2

- (página 16) Para sumar o restar en sistema de numeración egipcio utilizaríamos la regla de canje (10 unidades de un orden por 1 unidad del orden inmediato superior). Ambos materiales servirían para representar los números en egipcio ya que ambos tipos de materiales reflejan la ley de agrupamiento en base 10 y no son posicionales.

3.1.3

- (página 17)Tanto en sistema ático como en sistema egipcio, la cantidad de símbolos no permite determinar si un número es mayor que otro.

3.1.5

- (página 19) La caparazón de tortuga representaba el cero. Para ordenar los números en maya podemos emplear como criterios: a más niveles, más grande el número y si tienen igual cantidad de niveles, debemos fijarnos en el nivel superior. En nuestro caso es mayor el primero de la izquierda y menor el último de la derecha. Los interiores deben ser invertidos.

3.1.7

- (página 21)
  1) 45 decenas de mil = 4500 centenas
  2) 34 centenas de millón = 340.000 decenas de mil
  3) 196.000.000 unidades de mil =196 unidades de mil de millón
  4) 2 unidades de billón = 200.000.000 decenas de mil
  5) 45 trillones = 4.500.000.000 decenas de mil de millón
- (página 23) Es igual a 6.000.006.000

4. La numeración como objeto de enseñanza

4.1 El problema como origen del conocimiento

Si nos detenemos a pensar cómo ha nacido el conocimiento a lo largo de la historia de la humanidad, veremos que el origen se haya ligado a la solución de algún problema. ¿No tendría sentido entonces pensar la enseñanza vinculada a la resolución de problemas? ¿Por qué dejar para el final los problemas que fundamentan la existencia del conocimiento?
Es así que en este libro Ud. habrá encontrado al comenzar su lectura, que en realidad lo que había que hacer era ¡resolver problemas¡.
Partimos de problemas porque asentimos con el Dr. Gerard Vergnaud en que un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde. Según sus propias palabras:

> No sólo en sus aspectos prácticos, sino también en sus aspectos teóricos, el conocimiento surge a partir de los problemas a resolver y de las situaciones a dominar. Esto vale para la historia de las ciencias y tecnologías, también vale para el desarrollo de los instrumentos cognitivos en los niños (organizando su representación del espacio, simbolizando, categorizando objetos). También debería ser válido para la educación, especialmente la enseñanza de la matemática.(...) Las concepciones, modelos y teorías de los alumnos están formadas por las situaciones con las cuales se han encontrado. (Vergnaud, 1982)

4.2 ¿Qué se entiende por problema de aprendizaje ? ¿Qué significa partir de problemas?

Acordaremos que:

> Problema es toda situación que plantea un desafío, un obstáculo al alumno. Esto le permite poner en juego sus conocimientos previos, tomando decisiones acerca del o los procedimientos a utilizar, permitiéndole elaborar nuevas conceptualizaciones o modificando las ya adquiridas.

A partir de esta concepción del aprendizaje, tomando como punto de partida los problemas, explicitaremos un modelo didáctico inspirado en el enfoque de la Dra. Regine Douady y desarrollado en su tesis de doctorado en 1984. Con este modelo, los aprendizajes aparecen como fin de un proceso (institucionalización), se integran en nuevas situaciones (ejercitación), que a su vez son el punto de partida para producir nuevos conocimientos (selección del problema).

La búsqueda del problema es de suma importancia, ya que es desencadenante del proceso que acabamos de mencionar. Pueden encontrarse muy buenos problemas de aprendizaje en libros de texto fundamentados desde esta concepción del aprendizaje. Hacer esta elección requiere del docente:

Problema

- Conocer en profundidad el tema a tratar.
- Establecer conexiones con los conocimientos previos de los alumnos y los nuevos conocimientos a los que dará lugar el problema.
- Consultar bibliografía seria, fundamentalmente basada en trabajos de investigación con relación a cómo los niños aprenden.
- Contextualizar el problema según los intereses de los alumnos (cuando hablamos de intereses nos referimos tanto al plano social como al matemático).

Debemos preguntarnos: ¿qué **conocimientos previos** debe tener un alumno para resolver este problema?

Una vez en el aula y habiendo dado el problema a los alumnos, se harán lecturas y comentarios acerca del enunciado, pero en ningún momento la docente dará "indicios", o "pistas" que permitan reconocer "qué hay que hacer". Una vez analizado el enunciado, palabras que no se entienden, modos de expresión, etc., el trabajo queda en manos de los alumnos, ya sea con modalidad individual o grupal, según el problema. Evitar en este momento intervenciones docentes como ¿qué cuenta tienen que hacer?, o ante las preguntas del niño ¿es de suma?, ¿es de resta?, etc, contestar o hacer caras o gestos o responder con otra pregunta como ¿te parece?, ya que lo que logramos con ello es que el alumno adivine el procedimiento y no lo deduzca según su propia reflexión. En el momento de la investigación el docente debe dar los tiempos necesarios para la producción de los distintos grupos o niños, sin hacer apreciaciones acerca de si está bien o mal, dejando a los alumnos investigar, equivocarse, intentar distintas estrategias, volver a probar, escuchar al compañero de grupo, respetar las reglas, buscar formas de validar los resultados, etc.

Investigación

Luego de la investigación, los distintos niños o grupos, comentan sus resultados y procedimientos. Pero no basta con que los niños muestren las distintas formas de arribar a la respuesta o los distintos resultados. Lo importante aquí es la reflexión que se hace a partir de las producciones de los alumnos. El docente formulará preguntas, cuestionará resultados correctos o incorrectos, promoverá la sana discusión y el intercambio de ideas. Pero todas estas intervenciones docentes están relacionadas con el contenido que tenía como fin trabajar con los niños. No aceptar de entrada las respuestas correctas y rechazar las incorrectas, la aceptación o el rechazo de las mismas será hecho por los alumnos luego de las reflexiones que ha tenido oportunidad de hacer orientados por el docente. Se espera así que los alumnos arriben a conclusiones (nuevos conocimientos) y los consideren como una nueva y valiosa herramienta.

Explicitación

Los nuevos conocimientos son institucionalizados por el docente. ¿Cuál es el sentido de la institucionalización? Homogeneizar las concepciones y prácticas de los alumnos producidas en la clase y hacer que los mismos sepan que han arribado a un nuevo conocimiento. Con esta intervención docente tanto maestro como alumnos toman en cuenta "oficialmente" los nuevos saberes.

Institucionalización

Los nuevos conocimientos son institucionalizados por el docente. ¿Cuál es el sentido de la institucionalización? Homogeneizar las concepciones y prácticas de los alumnos producidas en la clase y hacer que los mismos sepan que han arribado a un nuevo conocimiento. Con esta intervención docente tanto maestro como alumnos toman en cuenta "oficialmente" los nuevos saberes.

Ejercitación

Los nuevos conocimientos incorporados en el proceso, podrán ser puestos a funcionar en una ejercitación lo más variada posible, seleccionada y contextualizada debidamente por el docente. Se da lugar así a la iniciación de un nuevo proceso, donde el punto de partida es un nivel superior al anterior.

4.3 ¿Qué es la trasposición didáctica?

El Dr. Ives Chevallard utiliza la expresión **objeto de saber** para designar el conocimiento altamente desarrollado, propio de la comunidad científica y que se diferencia del **conocimiento para enseñar**. Dicho saber sufre una readaptación al ser enseñado en los niveles básicos de enseñanza convirtiéndose en **objeto de enseñanza**. Llama **trasposición didáctica** al proceso por el cual un saber científico se transforma en un conocimiento para enseñar y seguidamente en un objeto de enseñanza. Dicha trasposición didáctica es tanto más marcada cuanto más básico es el nivel de los alumnos a quienes va dirigida la enseñanza. Las concesiones necesarias son inevitables pero es indispensable minimizar el riesgo de deformación de los saberes. El docente, por lo tanto, debe conocer lo mejor posible el objeto matemático que debe enseñar, para analizar el grado de trasposición didáctica de su propuesta.

4.4 Sugerencias para el aula

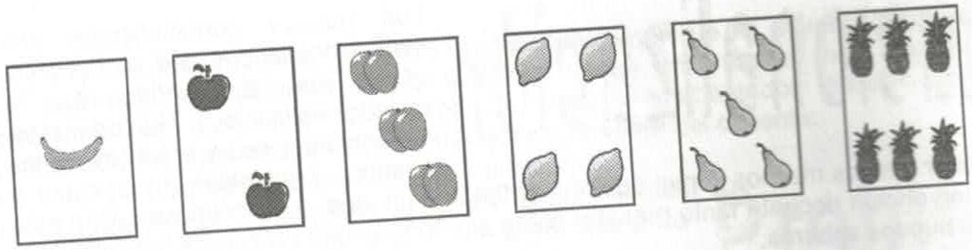
A partir del planteo didáctico expuesto encontrará algunas sugerencias para el aula. La intención es acercarle algunas propuestas trabajadas en el aula con esta modalidad, para que pueda observar la riqueza de las producciones de los alumnos, el tipo de intervenciones docentes; todo esto en relación a los problemas de la numeración que han sido el objeto de análisis de este libro.
Le recomendamos a Ud. ponerlo en práctica con algún colega o directivo que colaborará con el registro de lo que sucedió. Una vez concluida la experiencia analice con él lo ocurrido, confronte con lo que encontró en este libro. Verá lo interesante y provechosa que resulta esta práctica.

4.4.1 Uno al lado de otro (Para sala de 5 años)

Material necesario: Una banda numérica con los números del 1 al 6.

1	2	3	4	5	6

Tres mazos de cartas con colecciones de 1 a 6 elementos. Variar los objetos usados en cada mazo para el mismo número. Por ejemplo si en el primer mazo hay un corazón en el otro mazo que haya un perro, y en el tercer mazo un sol.



Reglas

- Se juega en equipos de 3 o 4 niños. Cada niño dispone de su banda numérica. Se mezclan los tres mazos de cartas y se colocan en una pila, boca abajo, sobre la mesa.
- Cada niño, en su turno, saca una carta y debe tachar en la banda numérica el número correspondiente a la cantidad de elementos que hay en la misma.
- Gana el que primero que consiga las tres marcas "pegadas", una al lado de otra (los tres números consecutivos).

Las cartas que se extraen en cada jugada las conserva cada jugador, no deben devolverlas al mazo.

Conocimientos previos de los alumnos

Conocimiento del recitado de los números hasta 10.
Conteo
Reconocimiento de la banda numérica como un portador numérico, cuyo primer número es 1 y los demás son los que siguen a partir de 1.

Variables didácticas

- Los números de la banda numérica son desde el 1 al 6 ya que se pretende acordar cómo se escriben simbólicamente cada uno de esos números.
- Las cartas tienen sólo colecciones y no tienen números escritos, ya que se pretende que recurran al conteo o a la percepción espacial de los elementos para determinar el cardinal. La variación de los dibujos en los distintas mazos apunta a que, luego de varias jugadas, no deduzcan de qué numero se trata por el dibujo. También pueden hacerse todas las cartas con los mismos dibujos, por ejemplo todos soles.
- Sacar las cartas por turno permite a los demás integrantes controlar cómo hacen sus compañeros para tachar.
- Cada jugador conserva las cartas que se van sacando para poder controlar las jugadas al finalizar ante posibles discusiones como ¿quién ganó?, ¿cómo hizo para marcar?, ¿hubo trampa o no?.

Investigación

Algunos niños recurren a la percepción espacial de los elementos. Es el caso de Josefina que saca una colección con 4 elementos y observándola rápidamente dice "es el 4", marcándolo a continuación. Josefina, y algunos pocos niños, recurren al conteo solo para 6 elementos, y no lo usan para tachar numerales en la banda.
Otros niños como Martina recurren al conteo para cualquier colección que se le presente y también lo hacen para encontrar el numeral en la banda.
Un tercer grupo de niños recurren al conteo y a la percepción espacial de los elementos de la colección, dependiendo de la colección que se presente, tal como

Josefina, pero a diferencia de ésta, usan el conteo sobre la banda numérica para numerales que no conocen o que no están seguros si es el que suponen.
En esta etapa del trabajo en el aula la docente se acerca a las mesas de trabajo para alentarlos a jugar, para observar sus procedimientos, para evitar algunos desacuerdos mientras juegan, pero recordamos no hacer intervenciones si aparecen errores, dejar esto para la confrontación en el momento de la puesta en común o bien sugerir alguna confrontación en ese momento, para ese equipo.
Al pasar por un grupo la docente hace la siguiente observación:
Martín tiene ya tachados el 1 y el 3. Fede le dice: "si te sale 2 ganás". Martín saca 5.
Fede tiene ya tachados el 2 y el 6 y dice: "seguro que no gano porque entre el 2 y el 6 tengo tres todavía" (refiriéndose a la cantidad de numerales que hay entre 2 y 6).
Obsérvese cómo el contenido "estar entre" para números naturales aparece espontáneamente en algunos grupos mientras juegan. Esto luego se retoma en la puesta en común.

Nota: si analizamos el procedimiento de buscar por conteo el numeral desconocido en la banda numérica, entenderemos por qué no es conveniente que la misma tenga el cero.

Puesta en común

Aquí sí los niños cuentan quién ganó, cómo hicieron para saber cuál tachaban, si hubo errores cuáles fueron y por qué ocurrieron, etc.
Por ejemplo Laura comenta que ella había tachado el 6 y su compañero Juan la corrigió diciéndole que debía tachar el 5. Cuando se le preguntó cuál tacharon finalmente dijo que ella los contó de nuevo y eran 5.
En otro grupo se comentó " Agus nunca sabe cuál tachar". Ante este comentario la maestra le pide a Agus que muestre en la banda que está en la sala cómo hace. Para ello se le pide que saque una nueva carta. Saca 5 y al momento de contar los elementos Agus dice " 1, 2, 3, 10....". En ese momento la docente diagnostica que el niño no ha conseguido aún memorizar la serie oral planteada como conocimiento previo. El trabajo para Agus será memorizar la serie oral para realizar con éxito este juego en otra oportunidad.
Caro dice que ella ahora sabe cómo es el 6. A la pregunta ¿cómo te diste cuenta?, responde : "porque hice así: 1, 2, 3, 4, 5,6" (cuenta señalando con el dedo sobre la banda numérica hasta llegar a 6).
Retomando los comentarios de Martín y Fede durante el desarrollo del juego, la docente hace preguntas a todos los niños como:

- Si tenés tachados 2 y 3 ¿qué número tiene que salir en la carta para ganar? Y si los que están tachados son 4 y 6 ¿con qué carta ganás?
- Lali tiene tachados 3 y 6 y le tocó la carta que tiene 4 gatitos, ¿ganó?

A partir de éstas y otras reflexiones se establecen acuerdos que figuran en la institucionalización.

Institucionalización

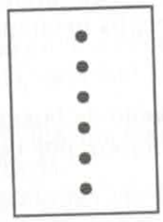
A continuación figuran las conclusiones que se extraen en términos de los niños. Entre paréntesis figura el contenido.

- Para saber cómo se escribe el número lo podés buscar en la banda contando. (Reconocimiento de los numerales del 1 al 6).
- Contar los dibujos con mucha atención para no saltear ninguno o contarlo más de una vez. (Conteo y cardinalización)
- El 2 le sigue al 1, el 3 le sigue al 2, el 4 le sigue al 3...(siguiente de)

- Antes de 6 está 5, antes de 5 está 4, ... (Antecesor)
- Entre 1 y 3 está 2, entre 2 y 4 está 3, ... (Estar entre)

Variantes del juego

- Modificar la regla "Gana el que primero consiga las tres marcas pegadas, una al lado de otra", por "Gana el que tacha primero todos los números de la banda". Es una consigna más simple. En este caso el contenido "estar entre" no siempre está presente en las discusiones.
- Ampliar la banda numérica hasta 10 para trabajar con el reconocimiento de numerales hasta 10.
- Los dibujos de las cartas serán bolitas dispuestas siempre una al lado de otra, o una debajo de otra, para que los niños apelen al conteo y no a la percepción espacial de los elementos. Por ejemplo la carta 6 sería así.



Hay otras variantes que seguramente Ud. docente podrá hacer, pero recuerde que con cada variante hay un contenido que se quiere trabajar y no hacerlas solo por cambiar el juego para que "no se aburran con el mismo".

4.4.2 Jueguitos electrónicos (De tercero a sexto años haciendo modificaciones en los números involucrados)

Pablo quería que su cumpleaños fuera absolutamente divertido. Estuvo pensando durante varios días hasta que se le ocurrió la gran idea. Organizaría un juego semejante al Pinball. ¿Lo conocen?. Cada pelotita que cae en un rebotador suma un puntaje que depende de la ubicación del rebotador en la cancha. Los puntajes de los rebotadores son: 1, 10, 100, 1.000, 10.000 y 100.000 puntos. Gana el que logra mayor puntaje en 1 minuto de juego.
El día del cumpleaños de Pablo, los chicos se organizaron para jugar en equipos de 4 participantes. Finalizado el juego cada equipo obtuvo las siguientes puntuaciones:

Equipo A ------------- 2.025 puntos

Equipo B ------------- 1.899 puntos

Equipo C ------------- 22.104 puntos

Equipo D ------------- 100.100 puntos

- ❑ ¿Cuántas pelotitas debieron embocar para conseguir estos resultados y en qué rebotadores?
- ❑ ¿Hay una única respuesta a la pregunta anterior? ¿Por qué?
- ❑ ¿Cuál de los equipos podría haber conseguido su puntaje embocando la menor cantidad de pelotitas?
- ❑ ¿Pueden asegurar que el equipo que consiguió mayor puntaje embocó la mayor cantidad de pelotitas?

Conocimientos previos de los alumnos

Este problema se ha presentado a grupos grandes de alumnos entre los 10 y 12 años y también a alumnos de profesorado de EGB 1 y 2, (variando el puntaje obtenido por los equipos A, B, C, D) que han resuelto situaciones previas de descomposición y composición de números en unidades, decenas, centenas, etc., al estilo de:

2.345 = 2 u de mil + 3 c + 4d + 5 u
= 2.000 + 300 + 40 + 5

5 u de mil + 3 centenas + 5 u =
8 u + 30 d + 5 u de mil =

10.236

6 u
3 d
2 c
0 u de mil
1 d de mil

Variables didácticas

- *Los números involucrados corresponden al orden de las unidades, decenas y centenas de mil.*
- *El número 100.100 en comparación a los demás tiene sólo dos cifras significativas (1). Esto permite analizar el valor que da a las cifras su posición en comparación con la cantidad de cifras significativas y el tamaño de las cifras (para números de distinta cantidad de cifras).*
- *La variedad de valores para los rebotadores permite encontrar variadas respuestas, que permitirán analizar las distintas descomposiciones de un mismo número.*

Investigación

Observamos que un alto porcentaje de niños que resuelve correctamente el problema, en el momento de explicitar sus procedimientos apelan a descomposiciones de tipo aditivo. Como ejemplo tenemos a

- ✓ Andrea (11 años) que hace una descomposición a partir de la lectura oral: *" Yo armé el 2.025 con 2.000 y 25. Como 1.000 más 1.000 es 2.000 entonces se embocaron 2 pelotitas en el rebotador de 1.000 y para los 25 que faltan embocaron 25 pelotitas en el de 1."*
- ✓ Raúl (10 años) que compone el número usando como sumandos los valores de los rebotadores:

"1.000 + 1.000 + 10+ 10 + 1+ 1+ 1+ 1+ 1 entonces son 2 pelotitas en el de 1.000; 2 en el de 10 y 5 en el de 1" . Al preguntarle por qué hizo esto dijo: *"yo busqué llegar al 2.025 sumando los rebotadores que tenía."*

En los dos casos anteriores, así como en la mayoría de los niños en los que se probó la actividad, las respuestas provenían de operar con los valores asignados a los rebotadores. En muy pocos casos los niños contestaban **mirando la ubicación de las cifras en el numeral**. Los que lo hacían se expresaban en la forma siguiente:

- ✓ María (11 años): *"2 pelotitas en el de 1.000, 2 en el de 10 y 5 en el de 1"*. Al preguntarle cómo lo obtuvo, volvió a repetirlo señalando las cifras a medida que las nombraba.
- ✓ Julia (12 años): *"2 en el de 1.000, 25 en el de 1"* . ¿Cómo llegaste a ese resultado? *"Me fijé en el número"* y señaló de este modo 2.025

Los niños que dan este tipo de fundamentación son los que han advertido que conocer el valor posicional les permite resolver algunos problemas de manera mucho más económica que haciendo alguna operación, como en el caso de *Jueguitos electrónicos.*

¿Qué significa que un alumno a esta edad (10; 11; 12 años) aún no haga un buen uso del valor posicional.?. Aquí hay varias cuestiones a tener en cuenta. Si volvemos a los conocimientos previos de los alumnos uno esperaría que habiendo resuelto problemas del tipo de los detallados previamente y habiendo hecho trabajos previos con atados de palitos, material plano, ábaco, fichitas de colores, etcétera, pudieran dar respuestas del tipo de las de María y Julia. Lo que sucede es que habitualmente el tipo de ejercicios que los niños resuelven de composición y descomposición se hace de manera automática, descontextualizados de problemas donde puedan analizar el beneficio del valor posicional como un procedimiento más económico.
¿Cómo orientaremos la puesta en común y qué podemos entonces institucionalizar en la situación de jueguitos electrónicos?

Puesta en común

Algunos niños explicitan sus procedimientos considerando el puntaje del equipo A:

Respuesta de Matías

- 2 pelotitas en el hoyo de puntaje 1.000
- 2 pelotitas en el hoyo de puntaje 10
- 5 pelotitas en el hoyo de puntaje 1

pues **2x1.000 + 2x10 + 5x1 = 2.025**
o bien **2 unidades de mil + 2 decenas + 5 unidades = 2.025**

Respuesta de Jorge

- 20 pelotitas en el hoyo de puntaje 100
- 2 pelotitas en el hoyo de puntaje 10
- 5 pelotitas en el hoyo de puntaje 1

pues **20x 100 + 2x10 + 5x1 = 2.025**
o bien **20 centenas + 2 decenas + 5 unidades = 2.025**

Respuesta de Natalia

- 200 pelotitas en el hoyo 10
- 25 pelotitas en el hoyo 1

pues **200x10 + 25 x 1 = 2.025** (este caso es poco probable en el juego)
o bien **200 decenas + 25 unidades = 2.025**

Jorge y Natalia de quinto año de EGB dan estas respuestas con procedimientos basados en la multiplicación y la adición pero no usan la posicionalidad. Sólo

multiplican y suman usando como datos los valores de los rebotadores y buscando formar el número 2.025.
Matías se fija en las cifras del número y saca entonces directamente la cantidad de pelotitas y en qué rebotadores cayeron.
Es interesante aquí que el docente haga reflexionar a los niños acerca del procedimiento más económico y también la relación de los procedimientos con la descomposición polinómica del número (esta intervención docente está remarcada en negrita)

Institucionalización

Se acordará con los niños que el procedimiento de Matías es el más económico porque no necesita de las operaciones de adición y multiplicación, ya que el valor posicional de cada cifra le indica directamente la solución del problema.

Variantes de esta situación

Como ya anticipamos en el título variando los números involucrados podemos llevarla a distintos años de EGB. Una variante muy interesante es usar por ejemplo números de 4 a 6 cifras y rebotadores solamente de 1, 10, 100, 1.000 u otras variantes similares. Esto da lugar a descomposiciones del tipo
22.104= 22 u de mil + 1 c + 4 u

Ejercitación

Estas actividades permitirán poner en juego las nociones de agrupamiento y valor posicional. Las mismas son recreadas en variados ejercicios que permiten revisar recrear los conceptos y no trabajar mecánicamente alrededor de la misma clase de ejercitación.

☺ Completen las siguientes expresiones:

1 centena de mil =...... decenas de mil = ... unidades mil =.....centenas
1 decena de mil =..... unidades de mil = ...centenas = ... decenas
1 unidad de mil = ... centenas = ...decenas = ...unidades
20 centenas de mil =.... centenas
50 decenas de mil = ... decenas
30 unidades de mil = ... unidades

35 centenas de mil = ... unidades de mil
120 decenas de mil = ... centenas
350 unidades de mil= ..... decenas

☺ Para el número 150.385, ¿cuál de las siguientes descomposiciones es la correcta?.
Resuelvan sin hacer el cálculo y justifiquen.
a) 150 x 1000 + 30 x 10 + 85=
b) 1503 x100 + 80 x10 +5=
c) 1 x 100.000 + 5x10.000 +3x1.000 +8x100 +5=

☺ Resuelvan sin hacer el cálculo y justifiquen.
El número formado por 5 decenas de mil + 45 centenas + 20 unidades es equivalente a:
a) 5 x10.000 + 4 x 100 + 5 x100 + 20

b) 50 x 1.000 + 45 x 100 + 20

c) 5 x10.000 + 40 x100 +5 x 10 +20

Al terminar los últimos dos ejercicios realicen el cálculo y verifiquen si la opción que eligieron es correcta.

¿Qué situaciones podemos trabajar en primer ciclo de EGB para comenzar a construir la ley de posicionalidad de nuestro sistema de numeración?

Como hemos visto en Jueguitos electrónicos , lo que nos permite hacer análisis de valor posicional son situaciones donde los niños tienen oportunidad de extraer información de cada una de las cifras del número para la resolución de un problema.
En este sentido muchos libros de texto de EGB 1 y 2 actualizados tienen este tipo de situaciones, muchas de ellas en relación al uso de dinero. Es muy importante que tengamos claro que el dinero también es un material que representa los números como lo haría un sistema aditivo como el egipcio. Con usar dinero no garantizamos poner en juego la idea de valor posicional. Pero insistimos, la clave está en cómo llevarla al aula, qué tipo de discusiones, reflexiones y acuerdos harán los niños para arrimarse al concepto que se intenta trabajar: valor posicional.
Vamos a ejemplificar una de estas situaciones para trabajar en segundo año por primera vez la noción de valor posicional. Como verán la situación es común y nada especial, es una adaptación de jueguitos electrónicos.

4.4.3 Para ganar hay que embocar

Primera etapa

La maestra coloca en cada mesa una caja con un cartel que dice 10 y otra con un cartel que dice 1.
Los niños en grupos de 4 juegan a embocar pelotitas, corchitos o cualquier otro objeto en las cajas. Uno de los integrantes es el secretario que anotará en cada vuelta los puntajes obtenidos. Habrá un ganador por vuelta. Gana el niño que, al cabo de un tiempo estipulado por la maestra, lleva ganadas más vueltas. El rol del secretario será rotativo. Esta etapa es de juego libre. Los niños podrán validar el puntaje yendo a las cajas y haciendo el conteo de las pelotitas que se embocaron en cada una. En general lo hacen contando de 10 en 10 y de 1 en 1 hasta llegar a comprobar que es correcto el puntaje obtenido. Todavía no relacionan (a excepción de algunos niños) el valor de las cifras del puntaje registrado con la cantidad de pelotitas que se embocaron . Los procedimientos, son aditivos o por conteo como ya dijimos.

Segunda etapa

Los niños sacan cartoncitos con números de dos cifras

25	67	96	38

Deben anticipar cuántas bolitas deben embocar en cada caja. Si anticipan correctamente y aciertan luego en la caja ganan el puntaje. Condición: No se pueden embocar más de 9 en cada caja.
El secretario deberá anotar en una planilla como la siguiente lo que sucede en el juego.

Nombre	Cartón	Dice que debe embocar		Puntaje
		Caja de 10	Caja de 1	

Conocimientos previos de los alumnos
Los niños hacen descomposiciones aditivas de los números como:
67 = 60 + 7
67 = 10 +10 +10 +10 +10 +10 + 7
67 = 20 + 20 + 20 + 7
67 = 30 + 37 (etc.)
El conocimiento de estas descomposiciones proviene de la pronunciación de los números (sesenta y siete) y de los contenidos de adición en cálculo reflexionado vistos en primer año de EGB y parte de segundo.

Variables didácticas
Nos dedicaremos de ahora en más a analizar la segunda etapa de esta situación.

- Los números de los cartoncitos son de dos cifras ya que se pretende hacer acuerdos respecto del valor posicional para cifras de unidades y decenas.
- El registro en la tabla permitirá relacionar la escritura de los numerales con el valor de cada cifra.
- La condición del juego: no se permite embocar más de 9 en cada caja permite hacer la relación: valor de la cifra - escritura del numeral.
- El puntaje obtenido sirve para validar la situación. También validan recurriendo al conteo de las pelotitas en las cajas.

Investigación
Los niños hacen anticipaciones de acuerdo a sus conocimientos previos.

- ✓ Milena saca 32 y dice: -10, 20, 30...-, haciendo el conteo con tres dedos, -...y 2- . Llega a la conclusión así que debe embocar 3 en la caja de 10 y 2 en la de 1.
- ✓ Anabella saca 57 y dice: -en 50 hay 5 diez y 7-
- ✓ Eze saca 17 y dice: -qué poquito, ya perdí, tengo un solo 10 y las chicas tienen más de uno-.

El secretario interviene diciendo: -¿No ves que falta ver si Ana y Mile embocan?-
Eze muestra cara de felicidad ya que se ve con más posibilidades de embocar.
Los secretarios van haciendo los registros en cada grupo.

Puesta en común
Se dialoga acerca de las anotaciones en las distintas planillas y quiénes han sido ganadores y por qué.
La docente pide a los niños que observen las planillas y busquen la manera más corta posible de hacer las anticipaciones. Muchos niños ya lo habían descubierto mientras jugaban y confeccionaban las planillas.
Veamos este corto diálogo que hace referencia a ello:

Alexis: Cuando yo tuve que decir , dije 7 en la de 10 y 9 en la de 1.
Docente: ¿Qué número te tocó?.
Alexis: 79
Fran: Vos hiciste trampa.
Docente: ¿Por qué decís que hizo trampa?.
Fran: Porque copió de los compañeros.
Docente: ¿Qué copió?
Fran: Y mirá... 7, 7, 9, 9, (dice señalando la cifra 7 del numeral y el 7 de la planilla que esta en la columna cajas de 10. Lo mismo para el 9 señala en la planilla.)
Alexis: (Apurado por defenderse). Yo hice así pero eso no es trampa porque yo no copié. Ese cartón era mío (refiriéndose a que ningún niño de su grupo había sacado un cartón igual).
Docente: (Dirigiéndose al resto de los niños) ¿Qué opinan de lo que dicen Alexis y Fran?.

Las opiniones son repartidas. Algunos apoyan a Fran y otros a Alexis. A partir de allí la docente lleva a los niños a reflexionar que la economía de procedimientos no es trampa y que si acordamos ese procedimiento podemos volver a jugar más rápido y con más seguridad.

Institucionalización
Se concluye que el procedimiento de Fran es muy económico.

-¿Entonces al volver a jugar qué podemos hacer?-, dice la docente.
" Nos fijamos en el primer numerito que nos dice cuántas en la de 10 y el segundo cuántas en la de 1"
La docente institucionaliza el nombre de cifra en lugar de "numerito".
Invita a los niños a jugar nuevamente otro día con esta conclusión.
Más adelante se institucionalizará el nombre de cada una de esas cifras como unidades y decenas, mientras tanto se trabaja en términos de dieces y cienes.
Es importantísimo aclara que usar valor posicional en la resolución de problemas es independiente de que el niño sepa el nombre de unidades y decenas (aunque es importante que lo aprenda). Lo que el niño necesita descubrir es que las cifras de acuerdo a la posición que ocupan le brindan información:
En 83 son 8 en la caja de 10 y 3 en la caja de 1.

Observación: ¿Qué sucede si mientras los niños juegan no advierten lo que advirtieron Fran y Alexis?
El docente pedirá que observen las planillas de los secretarios y descubran alguna forma rápida de anticipar cuántas pelotitas hay que embocar en cada caja. Lo que están haciendo los niños es descubrir para luego aplicar la regularidad: "El primer numerito nos dice cuántas en la de 10 y el segundo cuántas en la de 1".

4.4.4 Bingo (Para primer año de EGB)

La siguiente situación es parte de un proyecto de primer año del Colegio San José de la calle Sol de Mayo 726 de la ciudad de Córdoba a cargo de la docente María Julia Uribe Echeverría (año 2001).
El proyecto que se presenta a los niños es la fabricación de un juego de bingo para jugar en la sala y para la familia. La familia participará en un bingo donde se recaudarán fondos Pro-Biblioteca de la sala.
La docente propone a los alumnos explorar y aprender mucho sobre los números, cómo se ordenan, cómo es más fácil encontrarlos en un tablero, cómo se llaman

los números, cómo se escriben, etc., porque "para saber hacer un bingo y saber jugar al bingo hay que aprender sobre los números".
Este proyecto lleva un gran tiempo de trabajo y alrededor de él se van planteando distintos contenidos acerca de la numeración. A los efectos de este libro sólo comentaremos una parte de ese proyecto.

Primeros Trabajos con Tableros de números
Se les presenta a los niños un tablero del 1 al 20, con 4 números ubicados en la serie.

1				5					
	12								20

El problema consiste en completar el tablero. Las siguientes preguntas y consignas de la maestra son los desafíos a los que los niños se irán enfrentando en esta situación colectiva.

- *¿Hasta qué número es este tablero?*
  ¿Cuál es el primer número de este tablero?
  Los números ya ubicados , ¿ están en algún lugar especial para ellos o se ubicaron en cualquier casillero?. Pedir justificación.

- *Van a decir un número para este tablero, van a ubicarlo y lo van a escribir. El número que se dice no puede ser el que le sigue al que dijo el compañero anterior.* Se pedirán explicaciones acerca de por qué ubican en ese lugar el número.

- *Ustedes piensan un número para seguir completando el tablero, yo salgo y cuando entro les hago preguntas que ustedes tienen que responder sólo con sí o no.* Las preguntas serán del tipo:
  - ¿es un número menor de 10?
  - ¿está entre el 11 y el 20?
  - ¿termina con 8? Etcétera

- *Ahora yo pienso un número para seguir completando el tablero y ustedes me hacen las preguntas...yo sólo respondo sí o no.*

- *Salgo con uno de ustedes. Los que quedan piensan un número. Entramos y les hacemos las preguntas.*

- *Pienso yo un número y les hago preguntas sobre ese número para que lo adivinen.*
  Las preguntas son del tipo:
  - ¿es más grande que 10?
  -¿es de la fila del 20?
  -¿está entre el 15 y el 17? Etcétera.
  Luego de cada pregunta los chicos deben decir si pueden descubrir el número y por qué.

Conocimientos previos:

El diagnóstico tomado (ver capítulo 3) indica que los niños al comienzo de primero saben:

- ✓ Recitado de la serie oral por lo menos hasta el 30.
- ✓ Conocimiento de la serie escrita por lo menos hasta el 10.
- ✓ Comparación de números del 1 al 10
- ✓ Comparación de colecciones desde el punto de vista numérico utilizando distintas estrategias: correspondencia, conteo, estimación, cardinalización.
- ✓ Clasificación y ordenamiento de colecciones desde el punto de vista numérico.
- ✓ Lectura y escritura de numerales convencionales por lo menos hasta el 10

Variables didácticas de la situación

- Tablero incompleto con números del 1 al 20 ya que se pretende profundizar la serie escrita hasta el 20 para la clase que explicitaremos. Para otras clases donde se seguirá trabajando con la situación planteada se usarán otros tableros: Hasta 30 y más adelante hasta 50.
- Los números organizados en forma de tabla facilita el análisis de regularidades y la comparación de numerales usando criterios como los siguientes:
    - Pertenencia de un numeral a "la fila de los 10", "la fila de los menores que 10", etc.
    - Un número de más cifras es mayor.
    - Si dos números tienen igual cantidad de cifras es mayor el que tiene la primera mayor.
    - Si dos números son de la misma fila es mayor el que tiene la última cifra mayor.

La situación lleva varios días de trabajo y las consignas son variadas aunque se mantiene el trabajo con el tablero de números, ya que se pretende poner en funcionamiento el intervalo de la serie numérica del 1 al 50 atendiendo a una gran variedad de contenidos:

- o Conocimiento del recitado de la serie numérica hasta el 50.
- o Enunciado del anterior y el posterior de un número cualquiera.
- o Nombrar, producir y comparar números.
- o Determinar números que verifican ciertas condiciones.
- o Producir e interpretar informaciones positivas y negativas relativas a las nociones numéricas.
- o Interpretar la información que suministra el tablero de números incompleto.
- o Comparación de números naturales desde el punto de vista cardinal y ordinal
- o Uso de las relaciones de mayor, igual, menor, uno más, anterior, posterior, siguiente, entre, uno más que, uno menos que... entre números naturales.

Investigación y puesta en común

Aquí mostramos una parte del registro de clase correspondiente a esta situación. El maestro será identificado con M, para los niños en forma colectiva CH.

M:... voy a poner sólo 4 números en el tablero.
....

M: Primer número del tablero... a ver Jazmín.
Jazmín: el 20
M: ¿el primero?
MF:1
M: ¿están de acuerdo?

Ch: ¡si!
M: ¿ cómo te diste cuenta MF?
MF: porque está 10
M: Van a decir un número y donde lo pondríamos, ¿de acuerdo?
Damián: 2 (indica el casillero correcto)
M: ¿por qué el 2?
Damián: después del 1 va el 2
M: Miren la pista que tiene Damián, él se dio cuenta que tiene que ir en orden. Vamos a ver con otra condición porque ustedes están muy bichos hoy.
M: A ver Anita, un número.
Anita: (piensa)
Vale: 1, 2, 3, 4
M: Vale, hay que dejar el momento para que Anita lo piense.
M: (espera un momentito) Decí un número. Acordate: ¡no el que sigue al que dijo Damián!.
Anita: 4 (indica el casillero correcto)
M: muy bien. ¿Por qué ahí el 4?
Anita: porque el 3 no se puede poner después del 2. (Tiene en cuenta la condición de la actividad)
M: Por qué sabés que el 4 va ahí.
Anita: (piensa)
M: ¿Por qué ahí?
Anita: Porque va en ese lugar.
M: ¿Por qué?
Anita: Por que no se puede poner en otro lugar.
M: ¿Por qué será que Anita dejó un lugar vacío? A ver MF que tiene ganas de hablar.
MF: Porque está vacío.
M Pero, por qué dejó ese vacío.
MF: Falta el 4.
M: ¿Puede ir el 4 ahí?
MF: No, porque ahí va el 3.
M: Si, si, si.
Sele: Porque si no diría 1, 2, 4.
M: A ver, otro número Sacha.
Sacha: 7(señala el lugar correcto)
M: ¿Por qué ahí?
Sacha: Porque después del 5 está el 6 y después el 7.
M: Miren lo que sabe Sacha.
Facu: El 19.(Señala el lugar correcto)
M: Oh¡ A ver qué pasa, el grupo de Facu, atenti.
M: ¿Por qué ahí?
Facu: Porque después del 18 está el 19.
M: ¿ Está bien lo que dijo Facu? A ver, ¿el grupo le quiere preguntar algo?
A: ¿Estás seguro que va ahí?
Facu: Si.
Mauro: ¿Si no está el 18, como sabés que va el 19?
Facu: Porque conté.
M: ¿Desde donde contaste?
Facu: Del 12 que es el más cerca del 19 y no hay ninguno más.
M: (Vuelve a explicar el procedimiento de Facu)
M: ¿Y que otra cosa podés decir del 19?
Facu: Porque está antes del 20 va ahí.
M: ¿Qué te parece Mica que sos del grupo?
Mica: que está bien, va ahí.

M: De este grupo ya pasó y pasó de aquel grupo. Barbi y las del grupo, atenti.
Barbi: El 8. (Señala correctamente)
M: ¿Por qué ahí?
Barbi: Porque está el 7.
M: ¿Y qué otra cosa podés decir del 8?, ¿qué otra pista?. ¿El grupo qué otra pista puede dar?
Agos: ¿Cómo te enteraste Barbi que después del 7 va el 8?
Barbi: (Hace caras) Y, contando.
M: ¿Desde dónde?
Barbi: Desde el 5.
Agos: ¡Es mi compañera¡
Agus: El 6. (Señala correctamente)
M: ¿Por qué va ahí?
Agus: Porque está después del 5. Sigue el 6.
M: ¿Qué otra cosa?
Lucre: Que está antes del 7.
M: Entonces, ¿entre qué números va?
Agus: 5 y 7.
Vale: No, entre 4 y 5.
M: A ver.
Vale: No.
M: Puede ir entre el 4 y el 5..
CH: No, porque... (no se escuchó).
Euge: El 9.
M: ¿Por qué va ahí?
Euge: Porque va después del 8.
Mauro: Porque va entre el 8 y el 10, porque no puede ir entre el 1 y el 2, porque vas a decir 1, 9, 2, 3, y así no.
M: ¿Que tiene que ver que esté un lugar después del 8?
Sele: Porque siempre después del 8 está el 9.
M: Está muy bien pero por qué. ¿Por qué tiene que estar ahí?
Luchi: Yo empecé a contar y me di cuenta que el 9 está al medio del 8 y del 10.
Lucre: Es más alto de número.
M: ¿Qué quiere decir más alto de número?
Lucre: Es más alto de número, no de altura.
M: Por ejemplo no es que es así: 8 9 o así 8 9.
Si fuese la guerrita, ¿qué le pasa a la carta del 9?
CH: La del 9 gana.
M: Y si fuesen las hojitas del libro, ¿qué le pasaría a la hojita del 8 y del 9? (Se refiere a los libros de números para niños)
Naza: El 9 es más grande, el 8 tiene que ir atrás.
M: O sea que vos ordenás primero la del 8 y después 9 que es más grande.
¿Y qué más le va a pasar?
Naza: La del 8 va a tener una menos que el 9.
Luchi: Así. 4 + 4 son 8 y si le ponemos uno más son 9 (con las manos).
M: Bien. Es lo que estabas explicando vos y Sele, nada más que ella lo hace con los números.
M: Ahora me van a decir qué número pondrían. (M va completando lo que los chicos dicen).
Guada: El 14.
Guada: Desde el 12.
M: Por qué será que empezó a contar desde el 12 y no de 1.
Juan: Porque es el más cerca.
Luchi: Hizo igual a Damián.

Sele: El catorce es el 1 y el 5.
Facu: El 1 y el 4.
M: Vamos a probar. Yo pongo 15. (Lo pone en el lugar del 14)
CH: ¡15!
M: Esperen. Y acá qué ponemos. (Señala los lugares subsiguientes).
CH: Siguen 16, 17, 18.
M: Y acá ¿qué número ponemos? (Señalando el lugar vacío entre el 18 y el 19).
Sele: El 1 y el 9
Poly: El 1 y el 10.
M: ¿Y qué número sería?.
CH: El diecidiez.
Mauro: No, el 110.
M: ¿Qué número sería el diecidiez?
Poly: Dos 1 y el 0.
M: O sea, éste.(Señala el 110).
CH: No, no pongas.
M: ¿Por qué? Si tenemos tiempo y borrador.
CH: No es el 110.
M: Sele, vas a terminar con lo tuyo así después vemos porque tenemos el diecidiez.
Sele: El 19...
M: ¿Qué podemos hacer?
Sele: Borrarlos.
M: Sí, pero nos fijemos por qué se juntaron dos números.
Sele: Porque el 15 tendría que estar más acá. (El 1 y el 4 no se acuerda cómo se llama)
Sele: Ah, ya se, el 14 es el uno y el cuatro.
M: Y ahora qué pongo. Cambio todos estos. Señalando desde el 14 hasta el 18.
M. Mientras controlan contando llegan al 19 y pasan.
Ch: Vos qué número habías dicho.
Naza: Diecidiez.o si no qué otro. 10 y 20.
M: Por qué será que dijeron que podía ser 10 y 10.
Poly: Por el 20, el cero.
Lucre: Porque sabían, va..creían que era el 10 y 10.
Juan: Porque tiene dos 1, el 10 y el 1.
M: Escribe 11 10. A Naza y Poly : ¿ese será el número?.

Naza: No, es el 11, y es 10 y 10.
Mauro: No, ese es el 1.010.
Luci: No, 10 y 10.
M: 10 y 10 es el nombre que le han inventado no es el número que inventaron (refiriéndose a la escritura).El 10 y 10 de verdad tiene dos 10.
Sol: También existe el número 10 y 10, por la hora, porque el puntero corto está en el 10 y el más cortito se juntan en el 10. Son las 10 y 10.
Lucre: Yo estaba pensando 10 y lo tenía en la cabeza y después conté otros 10 y me dieron 20.
M: (Le pide que repita más fuerte).
M: ¿Cuántos 10 contaste? 10 y 10.
Mauro: Y además el 19. Tendríamos que poner 10 y 10.
M: Pero existe, le podemos poner así, como dice Mauro el 110.
CH: No¡
Juan: Es de los números que tiene tres números.
Mauro: Es de los cientos.
Sele: Y ahí está el año 2001 (señalando una lámina). Tiene cuatro números.
M: Van a sacar el cuaderno. (Escribe la fecha en el pizarrón).

Son para destacar las siguientes intervenciones docentes:

- Tiempos que da a los alumnos para pensar y producir.
- Trabaja el respeto de los compañeros por los tiempos y las producciones de los demás.
- Las respuestas de los alumnos siempre van seguidas de los "por qué" de la docente. Además pregunta distintos modos de justificar la misma producción.
- En caso de error, por ejemplo el 14 que se lo confunde con el 15, la docente a través de preguntas lleva a los alumnos a una contradicción ya que en el mismo casillero se juntan el 18 y el 19. Esa contradicción es la que luego le permitirá hacer las discusiones relacionadas con la escritura del 20.

Institucionalización

Se usan y se discuten los siguientes contenidos: "estar entre" (encuadramiento de números), anterior, siguiente, conteo, escritura y lectura de los números hasta 20.
Los niños llegan a la conclusión que el 10 y 10 se escribe 20.

Variantes con tableros de números para distintos años de EGB

Las situaciones con distintos tableros de números tienen como objetivo avanzar en el conocimiento de la serie numérica escrita, producir escrituras y lectura de números, que en el caso particular de los intervalos numéricos tratados en el segundo ciclo suelen ser contenidos que plantean dificultades para muchos niños.
Por ejemplo al dictado de números niños con edades que oscilan entre 9 y 11 años manifiestan dificultades como:

Número dictado	Número escrito por los niños
10.520	1000520
5.020	500020
100.100	1.100

Sugerencia para tercer año de EGB en adelante

En el siguiente tablero hay lugares vacíos que debes completar.

- ¿Qué podrías decir acerca de la forma en que se escriben los números de este tablero?. ¿Y de la forma en que se leen?
- ¿Cuántas filas tiene el tablero completo hasta 6.090? ¿Cuántas filas tendría si lo continuaras hasta 9.090? ¿Por qué?
- ¿Cómo se leen los números de la cuarta fila? ¿Cómo se leen de todas las columnas exceptuando la primera?
- Un alumno al dictado de cinco mil cincuenta, escribió 500050. ¿Después de lo analizado para este tablero. ¿Le harías alguna corrección? ¿Cuál? ¿Cómo la fundamentarías?
- ¿El número dos mil cien puede escribirse en este tablero? ¿Por qué? ¿Entre qué números de este tablero se encuentra? ¿Cómo te das cuenta?
- Un niño afirma que el número 3.300 va en este tablero. ¿Tú qué opinas?

- ¿Puede escribirse un número de cinco cifras en el tablero completo hasta 9.090?. ¿Por qué?

1.000	1.010	1.020		1.040	1.050	1.060	1.070		1.090
2.000	2.010				2.050	2.060			2.090
						3.060		3.080	3.090
5.000	5.010							5.080	5.090

De la misma forma pueden crearse otros tableros, dependiendo de la numeración que se desea trabajar.
El tablero anterior corresponde al intervalo de 1.000 a 5.000 de 10 en 10 y puede ser ampliado a 9.090.
Otros intervalos pueden ser

- ✓ De 1.000 a 9.900 de 100 en 100.
- ✓ De 10.000 a 99.000 de 1.000 en 1.000
- ✓ De 10.000 a 15.800 de 200 en 200
- ✓ De 100.000 a 900.900 de 100 en 100, etc.

Otras sugerencias que contribuyen a fortalecer la correcta lectura y escritura de números son:

4.4.5 Escalas

- A partir del número 345 pedir a los niños la escala de 10 en 10, diciendo un número cada uno. Cuando se traban, por ejemplo en el pasaje de 395 a 405, pedir que escriban esos números y que analicen en qué se ha modificado la escritura de los mismos y por qué. Aquí es muy interesante discutir con los niños acerca de la modificación de las cifras en relación a la posicionalidad.
- Otras escalas posibles que se pueden plantear con distinto grado de dificultad:
  - ✓ Partiendo de 123 de 2 en 2.
  - ✓ Partiendo de 1.015 de 15 en 15.
  - ✓ Partiendo de 10.753 de 100 en 100, etc.

4.4.6 Encuadramiento

En la situación de Bingo para primer año hay una etapa donde la maestra da la siguiente consigna:
- Ustedes piensan un número para seguir completando el tablero, yo salgo y cuando entro les hago preguntas que ustedes tienen que responder sólo con sí o no.
Las preguntas serán del tipo:

- ¿es un número menor de 10?
- ¿está entre el 11 y el 20?

- ¿termina con 8?, etc.

Las preguntas relacionadas con "estar entre" son las relacionadas con el encuadramiento.

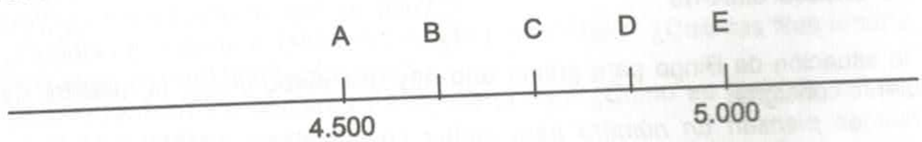
Para otros años es muy interesante plantearles a los chicos el mismo juego pero por ejemplo con un número de 4 cifras.
La maestra piensa el número 8.346.
Los niños hacen preguntas del tipo:
La cifra de las unidades es 1.
Es 2.
Es 3.
Así hasta llegar a 8.
Esta forma de preguntar no es económica.

Otra forma es preguntar si es par (o impar). Aquí el total de números se reduce al 50% . Pero luego, en general, los chicos siguen preguntando como en el caso anterior.
Una buena manera de preguntar es:

Está comprendido entre 1. 000 y 5.000.	No
Entre 5.000 y 7.500	No
Entre 7.500 y 8.500	Si
Entre 7.500 y 8.000	No
Entre 8.000 y 8.250	No
Aquí se concluye que está entre 8.250 y 8.500	
Entre 8.250 y 8.350	Si
Entre 8.250 y 8.300	No
Entre 8.300 y 8.325	No
Entre 8.325 y 8.335	No
Entre 8.335 y 8.340	No
Entre 8.345 y 8.347	Si
Es 8.346	

Comparando las distintas formas de preguntar se puede concluir cuál es la más económica.
Las actividades de encuadramiento además de contribuir con los objetivos ya planteados, son un buen conocimiento al momento de representar números naturales en la recta numérica.
A modo de ejemplo le proponemos resolver estos problemas tomados de Quinto.m@te[1]: El mago A. Divino y De la punta de aquel cerro.

El siguiente tramo corresponde a la Avenida Colón de la ciudad de Córdoba.
Los puntos A, B, C, D, E son paradas de una línea de colectivos que circula por esa avenida.

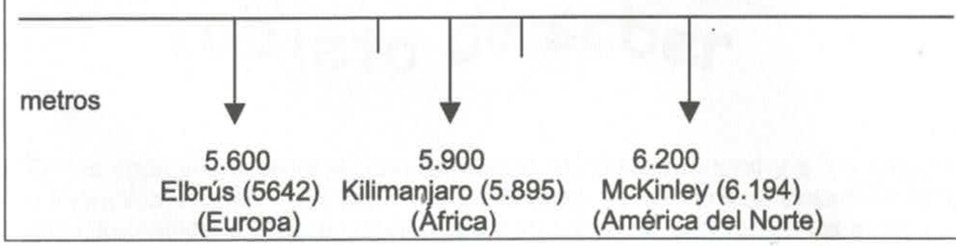


- El señor Pérez tiene que ir al 4.555 de la Av. Colón. ¿En qué parada le conviene bajarse?

1 Eguiluz,L.; Pujadas,M. - Quinto.m@te. Editorial Grafos XXI. Año 2.000.

- El conductor, para hacerle el favor a una abuelita, le dice que la va a dejar entre las paradas C y D, para ir a Colón al 4.650. ¿Será esta indicación la más conveniente para bajarse lo más cerca posible? ¿Por qué?
- Alfredo se bajó en la parada D para ir a Colón 4.865. ¿Debe caminar hacia el lado de la parada C o hacia la E?

Los números que figuran en la recta numérica corresponden aproximadamente, a picos de distintas partes del mundo. Ubica en esa recta en forma aproximada las alturas correspondientes a los picos Cerro Mercedario (6.770 m), Aconcagua (6.959 m), Tres Cruces (6.749 m) y Yerupajá (6.634 m) que son de América del Sur.



☺ *En el anexo 6 encontrará los contenidos sobre Numeración que deben enseñarse en EGB 1 y 2. Considere qué problemas de los propuestos a lo largo del libro emplearía para los contenidos allí planteados.*

5. La numeración como objeto de saber

En los capítulos anteriores, con referencia al número natural y a los sistemas de numeración, reconocimos algunos de sus usos, esbozamos su desarrollo histórico, nos informamos acerca del desarrollo de su conceptualización en los niños y vimos su tratamiento en los primeros ciclos de la escolaridad. En este capítulo nos proponemos profundizar algunas cuestiones matemáticas.

5.1 *¿Qué es el número natural?*

Si formulamos esta pregunta a personas no matemáticas, seguramente nos mirarán asombrados. Algunas considerarán tal cuestión de innecesaria respuesta; les bastará con nombrar algunos números. Otras se contentarán con encogerse de hombros al advertir su profundidad. Pero para un estudioso de la Matemática la respuesta lo lleva a los Fundamentos de la Matemática. Es allí donde la Lógica y la Teoría de Conjuntos se constituyen en conocimiento primario para definir los conceptos que son los pilares del edificio matemático. Para fundamentar el concepto de número natural se tienen en cuenta dos aspectos del mismo: el cardinal y el ordinal. Trataremos de acercarnos a su interpretación concientes de los riesgos que la trasposición didáctica provoca.

5.1.1 El número natural como cardinal

El número natural fue presentado en el capítulo 3 como una propiedad de los conjuntos. Allí expresábamos que si dos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biyectiva entonces ambos conjuntos son **equipotentes** o **coordinables**. Por tratarse de una relación de equivalencia se genera una partición, es decir que los conjuntos coordinables quedan agrupados formando clases.

> (...) El número como símbolo cardinal representa un conjunto, abstrayendo la naturaleza de los elementos que lo componen y el orden en que éstos se consideran: corresponde al atributo común que tienen todos los conjuntos tales que sea posible establecer entre cada par de ellos una correspondencia biunívoca entre sus elementos.[1]

[1] Rey Pastor,J.; Pi Calleja,P.; Trejo,C. Análisis matemático 1 . Editorial Kapelusz. 1969

El conjunto formado por el satélite natural de la Tierra y el conjunto formado por mi nariz pertenecen a la misma clase, tienen el mismo número cardinal (en nuestro idioma, se lo denomina uno). El conjunto formado por los animales de un casal y el conjunto formado por mis ojos pertenecen a la misma clase, tienen el mismo número cardinal (en nuestro idioma, se lo denomina dos). El conjunto formado por los dedos de mi mano derecha y el conjunto formado por los días hábiles de la semana pertenecen a la misma clase, tienen el mismo número cardinal (en nuestro idioma, se lo denomina cinco).

5.1.2 El número natural como ordinal

Otra teoría que fundamenta el número natural es la teoría axiomática de Peano, ligada a la acción de contar los objetos de una colección.

> (...) Al efectuar la operación de contar , establecemos implícitamente una ordenación entre los elementos del conjunto, y al último contado se le llama **número ordinal** del conjunto. El número natural como símbolo ordinal resulta, pues, de abstraer la naturaleza de los objetos, teniendo en cuenta solamente el orden en que se presentan a nuestra consideración.[2]

Esta teoría parte de tres conceptos primitivos: un objeto llamado uno, un conjunto cuyos elementos se llaman números naturales y una relación "siguiente de ". Además enuncia cinco axiomas que vinculan los conceptos primitivos:
Uno es un número natural
Todo número natural tiene un número natural que es su siguiente
El siguiente de un número natural es único
El uno no es el siguiente de ningún número natural
Si un subconjunto de naturales tiene al uno por elemento y el siguiente de todo elemento del mismo pertenece al subconjunto entonces tal subconjunto está formado por todos los números naturales.

5.2 *¿Qué propiedades tiene el conjunto de números naturales?*

Una vez definidos los números naturales también es posible definir[3] entre ellos una relación de orden estricto (<). Se trata de una relación binaria (relaciona pares de números naturales). Dados tres números naturales **m, n, p,** esta relación cumple:

ley de tricotomía: se da siempre una y sólo una de las siguientes relaciones **m<n** o bien **n<m** o bien **m=n**
transitividad: si m<n y n<p entonces m<p.

---

[2] Rey Pastor,J.; Pi Calleja,P.; Trejo,C. Análisis matemático

[3] Si bien no daremos la definición matemática de esta relación dados los alcances de este texto nos limitaremos a decir que ambas fundamentaciones dan su propia definición basadas en la coordinabilidad de conjuntos o en los axiomas de Peano. Para mayor información ver bibliografía matemática.

Definición
Un número natural **c** está entre dos números naturales **a** y **b** (siendo a<b) si se cumple a<c y también c<b.

El conjunto de los números naturales se representa por **N** y es común el uso de la siguiente notación:

$$\mathbf{N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}}$$

Definiciones:
Llamaremos **intervalo natural** [1, n] al conjunto de los números naturales menores o iguales que n.

Un conjunto A es **finito** si es vacío o coordinable con un intervalo natural, y es **infinito** en caso contrario.

Ahora estamos en condiciones de expresar que el conjunto de los números naturales goza de las siguientes propiedades:

- es infinito
- tiene primer elemento
- no tiene último elemento
- entre dos números naturales no siempre hay otro

El primer elemento de un conjunto ordenado es el menor elemento del conjunto y el último es el mayor elemento del conjunto. En **N,** el menor número natural es el 1, y no hay un número natural que sea el mayor de todos los números naturales. Algunos matemáticos prefieren iniciar el conjunto de los números naturales desde el cero. Lo importante es la declaración que se haga al comenzar a trabajar para evitar contradicciones. En nuestro caso, usaremos como notación para el conjunto de los naturales y el cero, la siguiente:

$$\mathbf{N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}}$$

La propiedad que enunciamos en tercer lugar permite expresar que si dos números naturales son tales que entre ellos no existe otro, los números considerados son **consecutivos.**

5.3 *¿Qué diferencia hay entre cantidad y número?*

Cuando pensamos en **siete días** estamos pensando en la **cantidad** de días de una semana. Siete es la **medida** y días es la **unidad** de dicha cantidad. Cuando la medida de las cantidades de una cierta magnitud, sólo admite números naturales decimos que estamos en presencia de **cantidades discretas.** El **número** es una cualidad de las colecciones, es un concepto abstracto.

5.4 *¿Qué es un sistema de numeración?*

La necesidad de un registro perdurable de los números llevó al hombre a emplear huesos, madera, piedras y hasta su propio cuerpo para tal fin. Recordemos que Denis Guedj expresa que estos constituyen **sistemas de numeración figurados,**

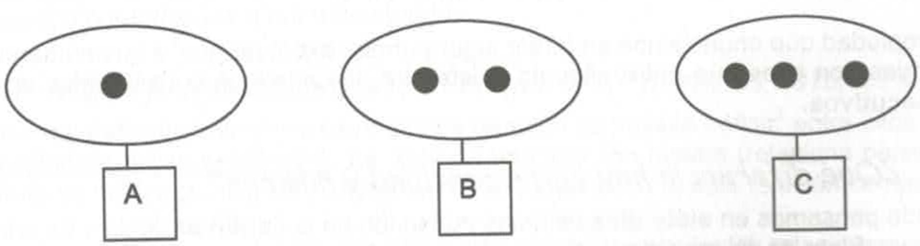
"constituidos por un sistema de marcas físicas materializadas sobre soportes duros". Estas representaciones fueron evolucionando desde representaciones directas de los números como un objeto-una marca (principio cardinal) hasta otras más complejas como los ábacos, los contadores con bolas, los quipu de los incas, etc.
Los sistemas de numeración no sólo hacían falta para la representación de números, también debían permitir el cálculo. En este aspecto, los sistemas figurados tenían el inconveniente de no dejar rastros de los pasos intermedios. Si el resultado era incorrecto o dudoso no quedaba otra alternativa que rehacer completamente el cálculo. Esto se solucionó con la aparición de los **sistemas de numeración escritos**. El hombre fue creando distintos sistemas de numeración hasta llegar a un sistema de numeración óptimo que permitiera

- la representación de cualquier número por grande que este fuera
- la comparación de números a partir de sus representaciones
- el cálculo con registro de los pasos intermedios (**algoritmos**)

La aparición de los sistemas de numeración posicionales permitió alcanzar estos objetivos.

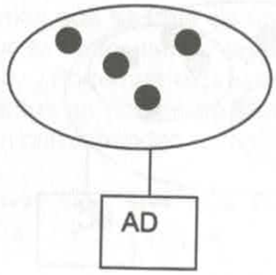
5.4.1 ¿Qué es el valor relativo de las cifras en un sistema de numeración posicional?

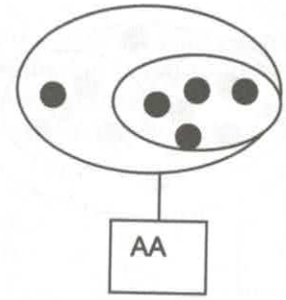
El sistema de numeración del problema **Completando la serie** representa los números usando un sistema posicional. Como vimos, utiliza solamente cuatro letras: A, B, C, D que cumplen el papel de **cifras** de este sistema de numeración. Con A indicamos el número de elementos de un conjunto unitario (es decir que A cumple la función del 1 de nuestro sistema de numeración), con B indicamos el número de elementos de un conjunto formado por un par de elementos o sea el número de elementos que tiene un conjunto con un elemento más que el anterior (es decir que B cumple la función del 2 de nuestro sistema de numeración), con C indicamos el número de elementos de un conjunto que tiene un elemento más que un par es decir, una terna (es decir que C cumple la función del 3 de nuestro sistema de numeración).



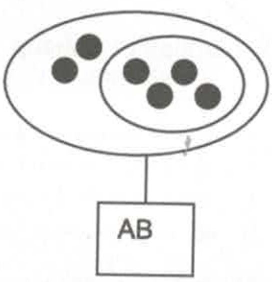
Al pasar de cuatro a siete elementos advertimos que para representar el cardinal de las distintas colecciones de puntos, se usan dos símbolos o cifras, siendo el primero, la letra A: A y D, A y A; A y B; A y C.

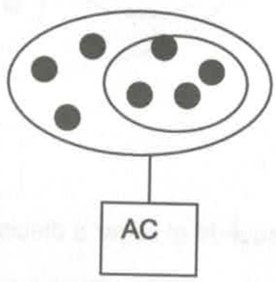
¿Por qué será esto así?.





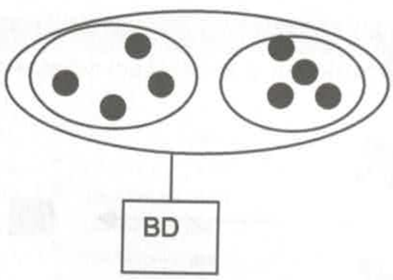
En el conjunto de la izquierda tenemos un conjunto de cuatro elementos (A) y no sobra ningún elemento (D).
En el conjunto de la derecha tenemos un conjunto de cuatro elementos (A) y sobra un elemento (A).

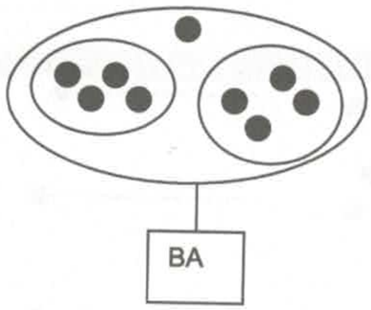




Nuevamente aparece un conjunto de cuatro elementos (A) y se indican los que sobran: B (o dos) en el dibujo de la izquierda y C (o tres) en el de la derecha.

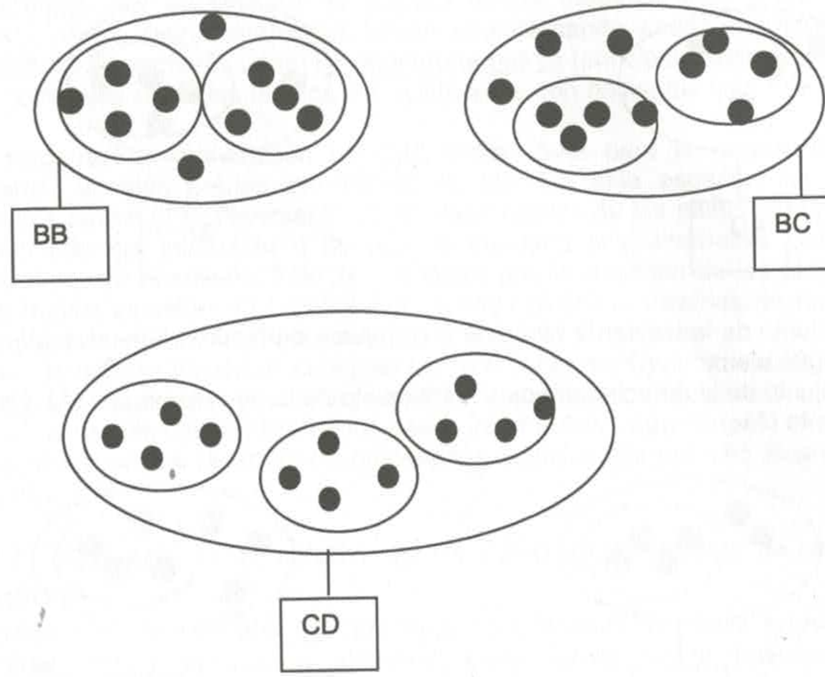
¿Qué sucede al aumentar el número de elementos del conjunto?.





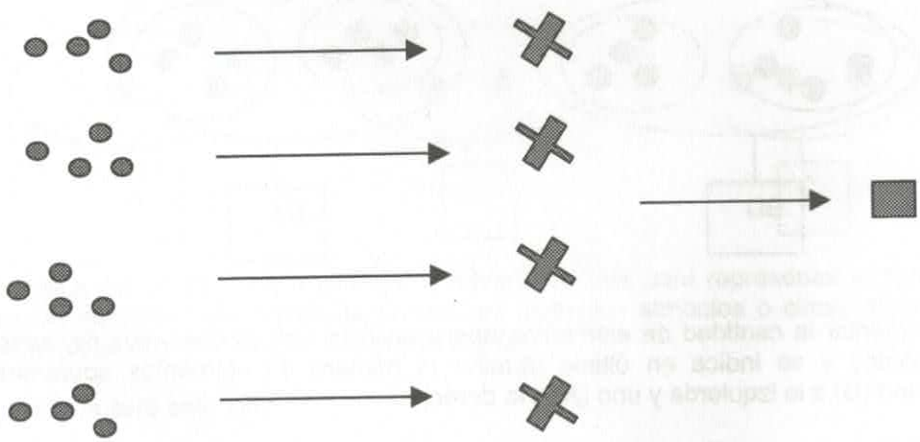
Al aumentar la cantidad de elementos aparecen B (o sea 2) conjuntos de cuatro elementos y se indica en último término el número de elementos sobrantes: ninguno (D) a la izquierda y uno (A) a la derecha.

Justifiquen las expresiones BB, BC y CD.



¿Qué sucede al llegar a dieciséis elementos?.

Observamos que al llegar a cuatro subconjuntos de cuatro elementos cada uno podemos volver a agrupar los subconjuntos como si ellos fueran elementos y formar un conjunto de subconjuntos. Gráficamente podríamos reemplazar los cuatro subconjuntos por una cruz y las cuatro cruces por un cuadrado. El número de elementos será ADD (A por un cuadrado y no sobran cruces ni puntos).



¿Cómo se representa en este sistema el número veintisiete?.

Sabemos que se trata de un sistema de base cuatro y que sus cifras son A, B, C, D. Por lo tanto vamos agrupando cada cuatro elementos y registrando los que sobran. ¿Podemos expresar esto en nuestro sistema indoarábigo?. Repartir los elementos en grupos de cuatro es dividir el número de elementos por 4 y los que sobran corresponden al resto de la división entera.

●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●● ●●●
x x x x x x

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$$

O sea que formamos 6 grupos de 4 elementos y sobran 3. Los 6 grupos quedarían representados por las cruces. A continuación, dividimos los 6 grupos nuevamente en 4.

x x x x x x
□

$$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

En síntesis, quedan 1 cuadrado, 2 cruces y 3 puntos.
A partir de la equivalencia

A ⟶ 1
B ⟶ 2
C ⟶ 3
D ⟶ 0

Resulta $27_{diez} = 123_{cuatro}$ = ABC. Resumiendo, para pasar del sistema indoarábigo a cualquier sistema posicional procedemos a dividir el número por la base y vamos tomando los sucesivos restos como cifras correspondientes a los distintos órdenes. En el ejemplo considerado, los cuadrados (o grupos de 16 elementos), cruces (o grupos de cuatro elementos) y puntos (unidades simples) constituyen los diferentes agrupamientos del sistema de numeración

Para afianzar

Completar las igualdades siguientes:

56_{diez} = ... $_{seis}$
302_{diez} = ... $_{cuatro}$
231_{diez} = ... $_{cinco}$
56_{diez} = ... $_{dos}$
64_{diez} = ... $_{dos}$
64_{diez} = ... $_{tres}$
64_{diez} = ... $_{cuatro}$
64_{diez} = ... $_{cinco}$
64_{diez} = ... $_{seis}$
64_{diez} = ... $_{ocho}$

Las cifras actúan como operadores multiplicativos de las potencias de la base de los diferentes órdenes. Tales productos reciben el nombre de valor relativo de las cifras. En 123_{cuatro} las cifras son 1, 2 y 3 siendo sus valores relativos 16, 8 y 3.

123_{cuatro}

- 3 unidades
- 2 unidades de 1° orden = 2 x 4 unidades simples
- 1 unidad de 2° orden = 1 x 16 unidades simples

Para afianzar

Complete el siguiente cuadro suponiendo que los sistemas de numeración usados son posicionales.

Numeral	*Valor relativo de la cifra 3*	*Base del sistema*
1034		*diez*
1034		*cinco*
3002		*seis*
3011	*192*	
2031	*21*	

5.4.2 ¿Qué es la expresión polinómica de un número?

Para representar cualquier número natural, los sistemas de numeración posicionales necesitan elegir, primeramente una base. La base debe ser un número natural mayor que uno. A continuación, se elige un símbolo para cada uno de los primeros números naturales incluyendo al cero y hasta el natural anterior a la base. Por ejemplo, en el sistema del problema **Completando la serie** la base elegida fue cuatro y los símbolos o cifras fueron D, A, B, C, correspondientes al cero, uno, dos, tres respectivamente. ¿Cómo representar la base y los números naturales mayores que ella?. El "Teorema fundamental de la numeración" nos permite dar respuesta a este interrogante. El mismo sostiene que
Todo número natural puede expresarse como un polinomio de las potencias de la base y cuyos coeficientes son números naturales menores que la base. Simbólicamente:

Sean b la base del sistema y n un número natural cualquiera entonces

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + a_{m-2} b^{m-2} + \dots + a_1 b + a_0$$

siendo los a_i números o cero naturales menores que b.

Esta expresión es la expresión polinómica de un número en un sistema de base b. Una vez obtenida la expresión polinómica de un número podemos pasar a su

representación en el sistema de numeración representando cada uno de los coeficientes por las cifras elegidas, respetando el orden de las potencias. Por ejemplo, volviendo a **Completando la serie**, hallemos la expresión polinómica de 27 en dicho sistema: $27 = 1x4^2 + 2x4^1 + 3$
Recordando que 1 es A, que 2 es B y que 3 es C, la representación de 27 en el sistema es ABC.
La expresión polinómica de un número nos permite pasar de una representación en un sistema de numeración posicional a otro sistema posicional.
Por ejemplo, si queremos pasar ABDDCA a base tres procedemos así:

$$\text{ABDDCA} \longrightarrow 1x4^5 + 2x4^4 + 0x4^3 + 0x4^2 + 3x4^1 + 1 = 1549$$
$$1549 = 2x3^6 + 0x3^5 + 1x3^4 + 0x3^3 + 1x3^2 + 0x3^1 + 1$$
$$\longrightarrow 2010101_{tres}$$

Para afianzar

Halle las expresiones polinómicas de los siguientes números y obtenga el numeral indoarábigo correspondiente:

2340_{seis}
2340_{ocho}
2340_{cinco}
1000_{ocho}
100_{cuatro}
10_{tres}
10_{cuatro}
10_{cinco}
10_{ocho}
10_{veinte}

5.4.3 ¿Cómo se representa la base en un sistema de numeración posicional?

¿Qué observó en los cinco últimos casos del ejercicio anterior?. La base de un sistema posicional tiene por expresión polinómica $b = 1xb^1 + 0$. Es decir que la escritura de la base siempre es 10, cualquiera sea la base dada.

5.5 Repuestas

(página 63)

1) $56_{diez} = 132_{seis}$
2) $302_{diez} = 10232_{cuatro}$
3) $231_{diez} = 1411_{cinco}$
4) $56_{diez} = 111000_{dos}$
5) $64_{diez} = 1000000_{dos}$
$= 2101_{tres}$
$= 1000_{cuatro}$
$= 224_{cinco}$
$= 144_{seis}$
$= 100_{ocho}$

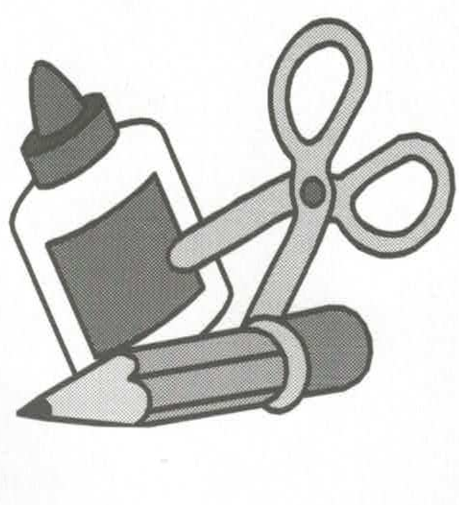
(página 64)

1034	30	diez
1034	15	cinco
3002	$3x6^3$	seis
3011	3x64	cuatro
2031	21	siete

(página 65)

$2340_{seis} = 2 x 6^3 + 3 x 6^2 + 4 x 6 = 564$
$2340_{ocho} = 2 x 8^3 + 3 x 8^2 + 4 x 8 = 1248$
$2340_{cinco} = 2 x 5^3 + 3 x 5^2 + 4 x 5 = 345$
$1000_{ocho} = 1 x 8^3 = 512$
$100_{cuatro} = 1 x 4^2 = 16$
$10_{tres} = 1 x 3^1 = 3$
$10_{cuatro} = 1 x 4^1 = 4$
$10_{cinco} = 1 x 5^1 = 5$
$10_{ocho} = 1 x 8^1 = 8$
$10_{veinte} = 1 x 20^1 = 20$

6. Anexos



Juguemos a las cartas

uno	dos	tres	cuatro	cinco
seis	siete	ocho	nueve	diez
once	doce	trece	catorce	quince

Juguemos a las cartas

veinte	treinta	cuarenta	cincuenta	sesenta
setenta	ochenta	noventa	cien/tos	mil
millón/es	mil millones	cien/tos mil millones	billones	mil billones

Cuanto más cerca mejor

0	0	1	1	2
2	3	3	4	4
5	5	6.	6.	7
7	8	8	9.	9.

Contenidos de Nivel Inicial sobre Numeración

Serie numérica	*El número natural. Funciones y usos en la vida cotidiana*
• Designación oral en situaciones de conteo (por lo menos hasta 20) • Reconocimiento de los números escritos por lo menos hasta 10. • Representación escrita de cantidades • Conocimiento del antecesor y el sucesor de un numero dado	• Cardinalidad (por lo menos hasta 10) • Ordinalidad (por lo menos hasta quinto lugar) • Relaciones de igualdad (tantos como) y relaciones de desigualdad (más que, menos que, uno más que, uno menos que) en colecciones de 5 y hasta 10 elementos

Contenidos de primer ciclo sobre Numeración

1° EGB1	2° EGB1	3° EGB1
Números naturales (0-100)	**Números naturales (0-1.000)**	**Números naturales (0-10.000)**
• Reconocimiento de sus usos en la vida cotidiana: contar, ordenar, cardinalizar, medir, identificar...	• Usos en situaciones cotidianas: medir, calcular costos, ordenar páginas, leer el reloj, etcétera.	• Idem 2°
• Designación oral y simbólica de números naturales	• Idem 1°	• Idem 1°
• Construcción y uso de la serie numérica oral y escrita hasta 100	• Construcción y uso de la serie numérica oral y escrita hasta 1.000	• Construcción y uso de la serie numérica oral y escrita hasta 10.000
• Conteo de colecciones respetando los principios de correspondencia y separación	• Idem 1°	
• Utilización de diferentes formas de obtener el cardinal de un conjunto en forma exacta y aproximada: conteo de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5, tanteo, estimación, arreglos geométricos, etcétera)	• Idem 1°	
	• Utilización de distintas formas de agrupamiento para contar los elementos de una colección numerosa: de 10 en 10, de 50 en 50, de 100 en 100	• Idem 2°
• Comparación de colecciones desde el punto de vista numérico utilizando distintas estrategias: correspondencia, conteo, estimación, cardinalización.	• Idem 1°	• Idem 1°
• Clasificación y ordenamiento de colecciones desde el punto de vista numérico.	• Idem1°	• Idem 1°

• Lectura y escritura de numerales convencionales de por lo menos dos cifras	• Lectura y escritura de numerales convencionales de por lo menos tres cifras	• Lectura y escritura de numerales convencionales de por lo menos 4 cifras
• Comparación de números naturales desde el punto de vista cardinal y ordinal	• Comparación de números naturales	• Idem 2°
• Uso de las relaciones de mayor, igual, menor, uno más, anterior, posterior, siguiente, entre, uno más que, uno menos que... entre números naturales	• Uso de los signos <, >, =	• Idem 2°
• Números ordinales: primero, segundo, ..., quinto. Último	• Números ordinales: primero, segundo, ..., quinto, sexto, ...	• Números ordinales: primero, segundo, ..., décimo, ...
• Utilización en distintos contextos de uso.	• Idem 1°	• Idem 1°
• Descomposiciones aditivas de un número natural. *Ejemplos:* ❑ 17= 8+9= 10+7= 20-3= ... ❑ 98 = 45+45+8= 90+8= 100-2=...	• Descomposiciones aditivas de un número natural. *Ejemplos:* ❑ 354= 300+50+4 = 200+ 100+ 50+ 4...	• Descomposiciones aditivas de un número natural. *Ejemplos:* ❑ 5047= 5000 +47 = 2500 +2500 + 40+7
• Reconocimiento, descripción, completamiento y creación de patrones no numéricos y numéricos. *Ejemplos:* ❑ O O O O ... ❑ 2, 4, 6, 8, 10,... ❑ 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34,.... ❑ 1, 5, 3, 1, 5, 3, 1, ...	• Predicción y comprobación de la ley que rige la secuencia en un patrón dado *Ejemplos:* ❑ 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, ... ❑ 2, 2+4, 2+4+6, ... ❑ 100, 97, 94, 91,... ❑ Escalas del 2, 5, 10, 100,...	• Predicción, comprobación y explicitación (mediante lenguaje coloquial, gráfico y simbólico) de la ley que rige la secuencia de un patrón dado *Ejemplos* ❑ 3, 6, 12, 24, ... ❑ 1, 3, 9. 27, 81, ... ❑ ½, 1, 1 ½, 2, 2 ½, ... ❑ Escalas del 10, 20, ..., 100, 200, ..., 1000, 2000, ...
• Identificación de regularidades en la serie numérica y su uso para leer y escribir números y compararlos	• Idem 1°	• Idem 1°
	Sistema de numeración posicional decimal • Inicio del análisis del valor posicional de las cifras en contextos significativos	**Sistema de numeración posicional decimal** • Interpretación y utilización de la información contenida en la escritura

	Ejemplos: manejo de dinero, cambios,...	decimal para desarrollar métodos de cálculo, redondeo, aproximación, encuadramiento y para resolver problemas. *Ejemplos:* ¿Cuántas hojas de un álbum de figuritas se pueden completar con 326 figuritas si cada hoja se llena con 10 figuritas?. El número 409 está entre 400 y 500 o entre 300 y 400?
• Aplicaciones de la nociones de mitad y duplo a cantidades discretas y continuas con apoyo concreto y gráfico.	• Determinación y uso de relaciones aritméticas entre los números (mitad de, doble de, 10 más que, ...	• Idem 2°
• Uso de la calculadora para investigar regularidades y propiedades de los números.	• Idem 1°	• Idem 1°

Contenidos de segundo ciclo sobre Numeración

4° EGB2	5° EGB2	6° EGB2
Números naturales (0-100.000)	**Números naturales**	**Números naturales**
• Lectura y escritura de numerales convencionales de por lo menos cinco cifras	• Lectura y escritura de numerales convencionales	• Idem 5°
• Comparación de números naturales desde el punto de vista cardinal y ordinal	• Idem 4°	• Idem 4°
• Uso de las relaciones de mayor, igual, menor, uno más, anterior, posterior, siguiente, entre, uno más que, uno menos que... entre números naturales	• Idem 4°	• Idem 4°
• Representación de números naturales en la recta numérica	• Idem 4°	• Idem 4°
• Determinación de la ubicación de números en la recta numérica a partir de distintas informaciones. *Ejemplos:* ubicar el número 12 conocida la ubicación del 0 y el 1, ubicar el número 2 conocida la ubicación del 4 y el 5, ubicar el número 23 conocida la ubicación del 16 y el 19	• Idem 4°	• Idem 4°
Sistemas de numeración antiguos	**Sistemas de numeración antiguos**	**Sistemas de numeración antiguos**
• Escritura, lectura y comparación de numerales utilizando las reglas de escritura de los sistemas de numeración: egipcio, romano	• Escritura, lectura y comparación de numerales utilizando las reglas de escritura de los sistemas de numeración: egipcio, romano, ático, chino-japonés. • Comparación de estos sistemas con el decimal posicional	• Escritura, lectura y comparación de numerales utilizando las reglas de escritura de los sistemas egipcio, romano, ático, chino-japonés, babilonio, ... • Análisis comparativos de los distintos sistemas: tipo de agrupamiento, base, número de cifras, posicionalidad, valor relativo y absoluto de las cifras, existencia de cero y su funcionamiento

Sistema de numeración decimal posicional	**Sistema de numeración decimal posicional**	**Sistema de numeración decimal posicional**
• Lectura, escritura y comparación de números e Idem 4°n el sistema de numeración decimal posicional.	• Idem 4°	• Idem 4°
• Expresiones polinómicas de un número natural. *Ejemplo:* 82.305 = 8x10.000 + 2x1.000 + 3x100 + 5 = 8 decenas de mil + 2 unidades de mil + 3 centenas + 5 unidades simples	• Idem 4°	• Expresiones polinómicas de un número natural. *Ejemplo:* 82.305 = 8x10.000 + 2x1.000 + 3x100 + 5 = 8 decenas de mil + 2 unidades de mil + 3 centenas + 5 unidades simples = $8x10^4 + 2x10^3 + 3x10^2 + 5$
• Equivalencias entre los distintos órdenes	• Idem 4°	• Idem 4°
• Descomposiciones en distintos órdenes. *Ejemplo*: 82.305 = 8decenas de mil + 2 unidades de mil + 3 centenas + 5 unidades simples = 83 unidades de mil + 30 decenas + 5 unidades simples = 822 centenas + 105 unidades simples	• Idem 4°	• Idem 4°
• Encuadramiento de un número natural entre decenas, centenas,..., decenas de mil sucesivas	• Idem 4°	• Idem 4°
• Aproximación de números naturales por redondeo o por truncamiento.	• Idem 4°	• Idem 4°

7. Bibliografía

7. Bibliografía

- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.: **El aprendizaje de las matemáticas**
Editorial Labor (1991)
- Fayol, M.: **Número, numeración, enumeración. ¿Qué se sabe de su adquisición?**
Revue Francaise de Pedagogie N° 70 (1985)
- Gómez Alfonso, B. **Numeración y cálculo**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Guedj, Denis : **El imperio de las cifras y los números**
Ediciones B, S.A. (1998)
- Ifrah, Georges: **Las cifras. Historia de una gran invención**
Alianza Editorial (1987)
- INRP (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica). ERMEL (Equipo de Didáctica de la Matemática) : **Conocer los números**
Aprendizajes numéricos y resolución de problemas. Curso preparatorio. Hatier. Paris. Marzo 1991
- Kamii, C.: **El número en la educación preescolar**
España. Visor libros. (1984)
- Kamii, C.: **El niño reinventa la aritmética**
España. Visor libros. (1986)
- Lerner de Zunino, D. **La matemática en la escuela. Aquí y ahora**
Buenos Aires. Aique Grupo Editor (1992)
- Parra, C.; Sadovsky, P; Saiz, I.. **Número y sistema de numeración**
Ministerio de Cultura y Educación. Programa de Transformación de la Formación Docente. (1994)
- Parra, C.; Saiz, I.: **Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones**
Buenos Aires. Editorial Paidos (1994)
- Parra, C.; Saiz, I.: **Los niños, los maestros y los números**
Dirección de currículo, Municipalidad de la Ciudad de Bs. As. (1992)
- Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, C. : **Análisis matemático**
Editorial Kapelusz (1969)
- Rico Romero, L.; Castro Martínez, Encarnación y Enrique: **Número y operaciones**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Sarton, George : **Historia de la Ciencia**
Editorial EUDEBA (1965)
- Vergnaud, G.: **El niño, las matemáticas y la realidad.**
México. Editorial Trillas (1991)
- Vergnaud, G.: **Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?**
Buenos Aires. Editorial Edicial

Propuestas curriculares de Matemática de Córdoba, Corrientes y Río Negro.

7. Bibliografía

- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.: **El aprendizaje de las matemáticas**
Editorial Labor (1991)
- Fayol, M.: **Número, numeración, enumeración. ¿Qué se sabe de su adquisición?**
Revue Francaise de Pedagogie N° 70 (1985)
- Gómez Alfonso, B. **Numeración y cálculo**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Guedj, Denis : **El imperio de las cifras y los números**
Ediciones B, S.A. (1998)
- Ifrah, Georges: **Las cifras. Historia de una gran invención**
Alianza Editorial (1987)
- INRP (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica). ERMEL (Equipo de Didáctica de la Matemática) : **Conocer los números**
Aprendizajes numéricos y resolución de problemas. Curso preparatorio. Hatier. Paris. Marzo 1991
- Kamii, C.: **El número en la educación preescolar**
España. Visor libros. (1984)
- Kamii, C.: **El niño reinventa la aritmética**
España. Visor libros. (1986)
- Lerner de Zunino, D. **La matemática en la escuela. Aquí y ahora**
Buenos Aires. Aique Grupo Editor (1992)
- Parra, C.; Sadovsky, P; Saiz, I.. **Número y sistema de numeración**
Ministerio de Cultura y Educación. Programa de Transformación de la Formación Docente. (1994)
- Parra, C.; Saiz, I.: **Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones**
Buenos Aires. Editorial Paidos (1994)
- Parra, C.; Saiz, I.: **Los niños, los maestros y los números**
Dirección de currículo, Municipalidad de la Ciudad de Bs. As. (1992)
- Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, C. : **Análisis matemático**
Editorial Kapelusz (1969)
- Rico Romero, L.; Castro Martínez, Encarnación y Enrique: **Número y operaciones**
España. Editorial Síntesis (1993)
- Sarton, George : **Historia de la Ciencia**
Editorial EUDEBA (1965)
- Vergnaud, G.: **El niño, las matemáticas y la realidad.**
México. Editorial Trillas (1991)
- Vergnaud, G.: **Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?**
Buenos Aires. Editorial Edicial

Propuestas curriculares de Matemática de Córdoba, Corrientes y Río Negro.

Numeración,

¿Querés que te cuente?

Propuesta para la enseñanza de los números naturales, el sistema de numeración y sus leyes.

La numeración es uno de los temas de Matemática de la EGB que más preocupa a docentes y a padres.
¿Se hizo Ud. alguna vez estas preguntas en relación a su enseñanza?

¿Qué saben los niños sobre el número y el sistema de numeración?.
¿Cómo implementar una propuesta didáctica basada en estos saberes previos?
¿Qué papel cumple el material concreto en esta nueva propuesta?
¿Por qué la decena no aparece en primero de EGB1?
¿Qué consecuencias tiene en los algoritmos de adición y sustracción?

A través de las páginas de este libro encontrará las respuestas a estos interrogantes. Además, sugerencias para distintos años y análisis didácticos de situaciones que lo acompañarán en su implementación en el aula.

Colección Resolver para aprender